# SISTEMA DE PRESTAÇÕES CONSTANTES NO REGIME DE JUROS SIMPLES: DUAS VERSÕES FINANCEIRAMENTE CONSISTENTES

**PROF. DR. CLOVIS DE FARO**[1]
**PROF. DR. GERSON LACHTERMACHER**[2]

**RESUMO**

No sistema Financeiro de Habitação (SFH), que tem como principal agente a Caixa Econômica Federal (CEF), o sistema de amortização mais comumente empregado é o da chamada Tabela Price (TP). Todavia, recorrentemente, tem sido judicialmente estipulada a substituição da TP, que se fundamenta no regime de juros compostos, pelo que tem sido denominado de "método de Gauss". Que faz uso do regime de juros simples. Iremos aqui analisar duas possíveis versões, que se baseiam em Forger (2009), que contemplou apenas a data focal no final do financiamento, o que contraria legislação ainda vigente. Evidenciou-se que o princípio de consistência financeira, que postula que os resultados respectivamente obtidos segundo os métodos retrospectivo, prospectivo e de recorrência, para apuração do saldo devedor, sejam coincidentes, foi observado em ambas as datas focais consideradas.

**Palavras-chave:** sistemas de amortização; prestações constantes em juros simples; consistência financeira.

**ABSTRACT**

In the Brazilian Housing Financial System (SFH), whose main financial agent is Caixa Econômica Federal (CEF), the most commonly used amortization method is the so-called "Tabela Price" (TP), which is based on compound interest. However, recurrently, it has been judically determined the substitution of TP by a simple interest amortization method that is known as the "Gauss-method". Following Forger (2009), which considers only the case where the focal date is at the end of the loan term, not taking into account a legal norm still prevailing, we will study two distinct versions. Both of which conform with the principle of financial consistency, that postulates that the results obtained by the three methods of calculating the outstanding debt at any point of time, the so-called retrospective, prospective and of recurrence, should be coincident.

**Keywords:** amortization systems; constant payments with simple interest; financial consisteny.

1 Ph.D. em Engenharia Industrial, Universidade de Stanford, Pós-Doutorado pela Universitat Müchen, U.M, Alemanha em EngenhariaEconômica e Pesquisa Operacional (1981). Contato: clovis.faro@fgv.br.

2 Doutor em Management Sciences - University of Waterloo (1993). Foi diretor de Gestão Acadêmica do IDE da Fundação Getúlio Vargas e professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro e Universidade Federal do Rio de Janeiro. Tem experiência na área de Administração, atuando principalmente nos seguintes áreas: Finanças, Redes Neurais, Mineração de Dados e Pesquisa Operacional. Contato: glachter@gmail.com

## INTRODUÇÃO

De modo geral, para operações de empréstimo de médio e longo prazo, o regime de juros que prevalece na nossa prática corrente é o dito ser de juros compostos. Em particular, sendo o corriqueiramente empregado em financiamentos habitacionais.

Entretanto, por evidenciar o que, no jargão jurídico, cf. Jusbrasil (2022), é denominado de anatocismo, o que significa cobrança de juros sobre juros, tem sido objeto de frequentes contestações judiciais. Conforme observado naquela mesma referência.

Sendo que, para o caso de financiamentos para aquisição da casa própria, de acordo com o Sistema Financeiro de Habitação (SFH), que tem como seu principal agente financeiro a Caixa Econômica Federal (CEF), o método de amortização mais comumente empregado é o chamado sistema francês. Que tem como principal característica o fato de que, a preços constantes, isto é, antes de haver incidência de correção monetária, as prestações periódicas, usualmente mensais, tenham um valor constante. Sistema de amortização este, como descrito em de Faro e Lachtermacher (2012), que costuma ser denominado de Tabela Price (TP). Com a peculiaridade de que sejam especificadas taxas de juros anuais, com capitalização mensal.

Na hipótese de que seja judicialmente determinada a substituição da Tabela Price por uma sequência de prestações constantes, com base no regime de juros simples, iremos analisar aqui duas possíveis versões. Que se fundamentam em Forger (2009).

Devendo ser ressaltado que, em sendo esta versão livremente pactuada pelas partes interessadas, credores e devedores. Deve ser explicitamente acordado que a determinação do saldo devedor, em qualquer época, conforme-se segundo o conceito de consistência financeira. Tal como apresentado em de Faro (2014), e aqui estendido para contemplar o regime de juros simples.

## 1. CARACTERIZAÇÃO DE PARCELAS CAPITALIZÁVEIS E NÃO-CAPITALIZÁVEIS

Considere-se um financiamento de valor *C*, que, adotando-se a taxa periódica de juros simples *i*, deve ser resgatado mediante o pagamento de *n* prestações periódicas e postecipadas, com a *k*-ésima sendo denotado por $P_k$ , para $k = 1, 2, \ldots, n$. .

Seguindo-se o prescrito em Forger (2009), o primeiro passo é subdividir saldos devedores, prestações e amortizações, em duas parcelas. Uma dita capitalizável e a outra denominada de não-capitalizável.

Denotando-se por $S_k$ o saldo devedor na época *k*, logo após o pagamento de $P_k$ , e por $A_k$ a componente de amortização na época *k*, que compõe a prestação $P_k$ , admite-se que se tenha $S_k = S_k^C + S_k^N$, $P_k = P_k^C + P_k^N$, e $A_k = A_k^C + A_k^N$, e para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Onde o superescrito *C* ou *N* identificam as correspondentes parcelas capitalizáveis e não capitalizáveis.

Ademais, também para $k = 1, 2, \ldots, n$ , é estabelecido que:

$$S_k^C = S_{k-1}^C - A_k^C = S_{k-1}^C - P_k^C \Leftrightarrow A_k^C = P_k^C \qquad (1)$$

$$S_k^N = S_k^{N-1} - A_k^N = S_{k-1}^N + J_k - P_k^N \Leftrightarrow A_k^N = P_k^N - J \qquad (2)$$

com a taxa de juros simples *i* sendo incidente somente sobre o saldo capitalizável $S_k^C$. Ou seja, admite-se que:

$$J_k = i \times S_{k-1}^C \qquad (3)$$

onde $J_k$ denota a parcela de juros componente da prestação $P_k$. Devendo-se observar que $J_k$ não é subdividida.

Quanto à época zero, que é a de concessão do financiamento, considera-se a introdução de um fator *f* de ponderação, com $0 \le f \le 1$ , de tal modo que:

$$S_0 = S_0^C + S_0^N \text{ com } S_0^C = C \times f \text{ e } S_0^N = C \times (1 - f) \text{ e } C = S_0 \qquad (4)$$

Ou seja, o valor *C* do financiamento é suposto dividido em uma parte capitalizável, com a outra sendo a parte não-capitalizável. O que, evidentemente, é uma construção artificial; mas que é crucial para o desenvolvimento sugerido por Forger (2009).

Adicionalmente, como o saldo devedor capitalizável é suposto decrescer linearmente, do seu valor inicial $S_0^C = C \times f$ , para o valor final $S_n^N = 0$ , e como, independentemente do particular sistema de amortização que seja adotado, é estabelecido que $P^C = P_k^C = A_k^C = A^C$, qualquer que seja *k*, tem-se que:

$$P^C = A^C = \frac{C}{n} \times f \qquad (5)$$

Consequentemente, fazendo-se uso da recursão dada por (1), obtém-se:

$$S_k^C = C\times f - k\times P^C = C\times f\times\left(\frac{n-k}{n}\right) \qquad (6)$$

Do que, tendo em vista a relação (3), decorre que:

$$J_k = S_{k-1}^C\times i = C\times f\times i\times\left(\frac{n-k+1}{n}\right) \qquad (7)$$

Como estamos aqui focando no caso de prestações constantes, quando $P_k = P = P^C + P^N$, com $P_k = P = P^C + P^N$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, considere-se, recursivamente, a relação (2). Tem-se que:

$$S_1^N = S_0^N + J_1 - P^N = C\times(1-f) + C\times f\times i - P^N$$

$$S_2^N = S_1^N + J_2 - P^N = C\times(1-f) + C\times f\times i - P^N + C\times f\times i - i\times P^C - P^N$$

$$= C\times(1-f) - 2\times\left(P^N - C\times f\times i\right) - i\times P^C$$

$$S_3^N = S_2^N + J_3 - P^N = C\times(1-f) - 2\times\left(P^N - C\times f\times i\right) - i\times P^C + C\times f\times i$$

$$-2\times i\times P^C - P^N = C\times(1-f) - 3\times\left(P^N - C\times f\times i\right) - i\times P^C - 2\times i\times P^C$$

Por conseguinte, generalizando-se, o que pode ser comprovado por indução, obtém-se:

$$S_k^N = C\times(1-f) - \left[k\times\left(P^N - C\times f\times i\right)\right] - \left\{(C\times f\times i)\times\left[\frac{k\times(k-1)}{2\times n}\right]\right\} \qquad (8)$$

Também, partindo-se da relação (2), e levando em conta (8), recursivamente, tem-se:

$$A_1^N = S_0^N - S_1^N = C\times(1-f) - \left[C\times(1-f) - P^N + C\times f\times i\right]$$

ou

$$A_1^N = C\times f\times i - P^N$$

Assim:

$$A_2^N = S_1^N - S_2^N$$

$$A_2^N = C\times(1-f) - C\times f\times i - P^N - \left[C\times(1-f) - 2\times P^N + C\times f\times i - C\times f\times i/n\right]$$

ou, tendo em vista a relação (3)

$$A_2^N = P^N - C\times f\times i + i\times P^C$$

Logo:

$$A_3^N = S_2^N - S_3^N$$

$$A_3^N = C\times(1-f) + 2\times C\times f\times i - 2\times P^N - \left[C\times f\times i - 3\times P^N + 3\times C\times f\times i - 3\times i\times P^C\right]$$

ou

$$A_3^N = P^N - C\times f\times i + 2\times i\times P^C$$

Portanto, o que se pode verificar por indução, segue-se que:

$$A_k^N = P^N - C\times f\times i + (k-1)\times i\times P^C \qquad (9)$$

ou, lembrando que $P^C = C\times f/n$

$$P^N - C\times f\times i = A_k^N - (k-1)\times i\times C\times f/n \qquad (9')$$

Somando-se, *k* vezes, a relação (9'), tem-se que:

$$k\times\left(P^N - C\times f\times i\right) = \sum_{\ell=1}^{k}\left\{A_\ell^N - \left[(\ell-1)\times i\times C\times f/n\right]\right\} \qquad (10)$$

Por conseguinte, tendo presente a relação (8), podemos escrever:

$$S_k^N = C\times(1-f) - \sum_{\ell=1}^{k}\left\{A_\ell^N - \left[(\ell-1)\times i\times C\times f/n\right]\right\} - (C\times f\times i)\times\left[\frac{k\times(k-1)}{2\times n}\right]$$

Do que decorre que a relação (8) pode ser reescrita de modo que:

$$S_k^N = C\times(1-f) - \sum_{\ell=1}^{k} A_\ell^N \qquad (8')$$

Como queremos que se tenha $S_n^N = 0$, segue-se que, tendo em vista a relação (10), para $k = n$:

$$C\times(1-f) = n\times\left(P^N - C\times f\times i\right) - (C\times f\times i)\times\left[\frac{n\times(n-1)}{2\times n}\right]$$

Ou seja, tem-se que:

$$P^N = \left(\frac{C}{n}\right)\times\left\{1 - f + \frac{f\times i\times(n+1)}{2}\right\} \qquad (11)$$

## 2. SELEÇÃO DA DATA FOCAL

Até este ponto, somente levou-se em conta que está sendo tratado o caso de prestações constantes. Isto é, temos que $P = P^C + P^N$, independentemente da época *k*. Com $P^C = A^C = C\times f/n$, , como dado pela relação (5), e com $P^N$ tendo seu valor tal como expresso pela relação (11).

Entretanto, como o regime de juros simples, ao contrário do regime de juros compostos, não goza da propriedade de cindibilidade do prazo de aplicação, é necessário que seja explicitado a data que seja considerada para fins de estabelecer a equivalência financeira entre o valor *C* do financiamento e a sequência de prestações. Data esta que, segundo Ayres (1963), é denominada de data focal.

Muito embora, genericamente, possa ser escolhida qualquer data focal, o mais usual é que sejam consideradas somente duas particulares datas focais.

A primeira, que talvez seja a mais natural, é a data de concessão do financiamento; qual seja a época zero (0). Sendo que, como observado por De-Losso, Santos e Cavalcante Filho (2020), é a que é prescrita no parágrafo 1º, do artigo 15-B da Lei 4.380/64.

A segunda, sendo a data do pagamento da última prestação; qual seja a época *n*. Data esta, que contrariamente ao que prescreve a Lei 4.380/64, tem sido estipulada em repetidas decisões judiciais.

Como, tomando-se a época zero como data focal, não é factível, no caso geral de *n* prestações, um tratamento analítico, iremos começar a análise especificando a época do pagamento da última prestação como data focal. Data esta que é a que tem sido considerada por autores como Antonick e Assunção (2006), Rovina (2009) e Nogueira (2013). É pertinente reiterar que a adoção da data de vencimento da última prestação, época n, como data focal, tem sido recorrente em despachos judiciais; como já anteriormente observado (cf. Jusbrasil, 2022). O que, por exemplo, pode ser constatado em sentença proferida nos autos do processo 2000.70.023505-4, fls. 227/262, da Vara Federal Especializada do Sistema Financeiro da Habitação de Curitiba, condenando instituições financeiras a substituir a Tabela Price pelo que se denominou de "método linear ponderado ou de Gauss".

## 2.1 Data Focal no Final do Financiamento

Neste caso, a equivalência financeira entre o valor *C* do financiamento e o da sequência de prestações, implica em que se tenha:

$$C\times\left(1+i\times n\right)=\sum_{k=1}^{n}P_k\times\left[1+i\times\left(n-k\right)\right]=P\times\sum_{k=1}^{n}\left[1+i\times\left(n-k\right)\right] \quad (12)$$

Como a soma de todos os números inteiros de 1 até *n* – 1 (fórmula de Gauss) é dado por:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(n-k\right)=\left(n-1\right)+\left(n-2\right)+\ldots+2+1=\frac{n\times\left(n-1\right)}{2}$$

tem-se que:

$$P=\frac{C\times\left(1+i\times n\right)}{n\times\left\{1+\left[i\times\left(n-1\right)/2\right]\right\}} \quad (12')$$

Como consequência, visto que se supõe que a prestação constante *P* seja subdividida nas componentes $P^C$e $P^N$, decorre das relações (12'), (5) e (11), que:

$$\frac{C\times\left(1+i\times n\right)}{n\times\left[1+i\times\left(n-1\right)/2\right]}=\frac{C\times f}{n}+\left(\frac{C}{n}\right)\times\left\{1-f+\frac{f\times i\times\left(n+1\right)}{2}\right\} \quad (13)$$

Ou seja, após algum algebrismo, tem-se que o fator f de ponderação é tal que:

$$f=\frac{1}{1+i\times\left(n-1\right)/2} \quad (13')$$

### *2.1.1 Exemplo Prático*

Considerando um financiamento de R$ 200.000,00, pelo prazo de 60 meses, à taxa de juros simples de 1% a.m, e prestações mensais, teremos, considerando as relações pertinentes, que $P^C=A^C=R\$2.574,00$, $P^N=R\$1.544,40$, $P=R\$4.118,40$, com $f=0,77220077$.

O Quadro 1 sumaria a evolução do financiamento.

| Época (*k*) | Juros | ANC | ACAP | PNC | PCAP | SNC | SCAP | Saldo Final |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | --- | --- | --- | --- | --- | 45.559,85 | 154.440,15 | 200.000,00 |
| 1 | 1.544,40 | 0,00 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 45.559,85 | 151.866,15 | 197.426,00 |
| 2 | 1.518,66 | 25,74 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 45.534,11 | 149.292,15 | 194.826,25 |
| 3 | 1.492,92 | 51,48 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 45.482,63 | 146.718,15 | 192.200,77 |
| 4 | 1.467,18 | 77,22 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 45.405,41 | 144.144,14 | 189.549,55 |
| 5 | 1.441,44 | 102,96 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 45.302,45 | 141.570,14 | 186.872,59 |
| 6 | 1.415,70 | 128,70 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 45.173,75 | 138.996,14 | 184.169,88 |
| 7 | 1.389,96 | 154,44 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 45.019,31 | 136.422,14 | 181.441,44 |
| 8 | 1.364,22 | 180,18 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 44.839,12 | 133.848,13 | 178.687,26 |
| 9 | 1.338,48 | 205,92 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 44.633,20 | 131.274,13 | 175.907,34 |
| 10 | 1.312,74 | 231,66 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 44.401,54 | 128.700,13 | 173.101,67 |
| 11 | 1.287,00 | 257,40 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 44.144,14 | 126.126,13 | 170.270,27 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 1.261,26 | 283,14 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 43.861,00 | 123.552,12 | 167.413,13 |
| 13 | 1.235,52 | 308,88 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 43.552,12 | 120.978,12 | 164.530,24 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| 47 | 360,36 | 1.184,04 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 17.734,88 | 33.462,03 | 51.196,91 |
| 48 | 334,62 | 1.209,78 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 16.525,10 | 30.888,03 | 47.413,13 |
| 49 | 308,88 | 1.235,52 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 15.289,58 | 28.314,03 | 43.603,60 |
| 50 | 283,14 | 1.261,26 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 14.028,31 | 25.740,03 | 39.768,34 |
| 51 | 257,40 | 1.287,00 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 12.741,31 | 23.166,02 | 35.907,34 |
| 52 | 231,66 | 1.312,74 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 11.428,57 | 20.592,02 | 32.020,59 |
| 53 | 205,92 | 1.338,48 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 10.090,09 | 18.018,02 | 28.108,11 |
| 54 | 180,18 | 1.364,22 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 8.725,87 | 15.444,02 | 24.169,88 |
| 55 | 154,44 | 1.389,96 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 7.335,91 | 12.870,01 | 20.205,92 |
| 56 | 128,70 | 1.415,70 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 5.920,21 | 10.296,01 | 16.216,22 |
| 57 | 102,96 | 1.441,44 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 4.478,76 | 7.722,01 | 12.200,77 |
| 58 | 77,22 | 1.467,18 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 3.011,58 | 5.148,01 | 8.159,59 |
| 59 | 51,48 | 1.492,92 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 1.518,66 | 2.574,00 | 4.092,66 |
| 60 | 25,74 | 1.518,66 | 2.574,00 | 1.544,40 | 2.574,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

**Quadro 1:** Evolução do Financiamento no Caso da Data Focal no Fim do Prazo

### *2.1.2 Consistência Financeira*

Seguindo de Faro (2014), para que um sistema de amortização possa ser considerado como financeiramente consistente, é necessário que o saldo devedor na época *k*, denotado por $S_k$ , para *k=1,2,...,n*, possa ser univocamente determinado de acordo com qualquer um dos três métodos clássicos de apuração. Ou seja, pelos métodos respectivamente denominados de retrospectivo, prospectivo e de recorrência.

Assim, estendendo o conceito de consistência financeira ao caso de adoção do regime de juros simples, devemos ter:

**a) Método Retrospectivo**

De acordo com o chamado método retrospectivo, o saldo devedor $S_k$ é determinado levando-se em conta o que tenha sido amortizado até a época *k* considerada.

Assim, dado que cada parcela de amortização é subdividida na componente capitalizável, e na componente não capitalizável, é estabelecido que:

$$S_k = C - \sum_{\ell=1}^{k} \left( A_\ell^C + A_\ell^N \right) \tag{14}$$

ou, como $A_\ell^C$ é constante

$$S_k = C - k \times A^C - \sum_{\ell=1}^{k} A_\ell^N \tag{14'}$$

Portanto, no caso do exemplo numérico apresentado na seção precedente, fixando atenção na época imediatamente posterior à de vencimento da 10ª prestação, tem-se:

$$S_{10} = \left[ \begin{array}{l} 200.000,00 - 10 \times 2.574,00 - 0,00 - 25,74 - 51,48 - 77,22 - 102,96 - 128,70 \\ -154,44 - 180,18 - 205,92 - 231,66 \end{array} \right.$$

$$S_{10} = R\$ 173.101,70$$

Diferença de três centavos, devido à arredondamentos, do valor apresentado no Quadro 1.

**b) Método Prospectivo**

De uma maneira geral, o método prospectivo, como o nome indica, representa, na época $k$ , o valor que é atribuído às $n-k$ prestações vincendas.

Em princípio, de acordo com o conceito de desconto racional, que se refere ao regime de juros simples (cf. de Faro & Lachtermacher, 2012, p. 98), deveríamos ter:

$$S_k = \sum_{\ell=k+1}^{n} \frac{P}{1+i(\ell-k)} \qquad (15)$$

Todavia, se assim o fizéssemos, não estaríamos levando em conta que cada uma das *n* prestações iguais a $P$ deve ser subdividida nas respectivas parcelas capitalizáveis e parcelas não capitalizáveis.

Retirando de cada uma das parcelas não capitalizáveis a correspondente parcela de juros, decorre que:

$$S_k = \sum_{\ell=k+1}^{n} P^C + \sum_{\ell=k+1}^{n} \left(P^N - J_\ell\right) \qquad (16)$$

ou, como $P^C$ e $P^N$ são constantes, com $P^C + P^N = P$, tem-se que:

$$S_k = (n-k)\times P - \sum_{\ell=k+1}^{n} J_\ell \qquad (16')$$

Assim, no caso do exemplo, tem-se:

$$S_{10} = (60-10)\times 4.118,4041 - 1.287,00 - 1.261,21 - 1.235,92 \ldots - 25,74$$

$$S_{10} = R\$173.101,67$$

**c) Método de Recorrência**

Partindo-se das relações (1) e (2), e procedendo-se recursivamente, tem-se que, tendo presente a relação (7):

$$k=1: S_1 = C - P + i\times C\times f$$

$$k=2: S_2 = C - 2P + i\times C\times f\times(2n-1)/n$$

$$k=3: S_3 = C - 3P + i\times C\times f\times(3n-3)/n$$

$$k=4: S_4 = C - 4P + i\times C\times f\times(4n-6)/n$$

$$\vdots$$

$$k=\ell: S_\ell = C - \ell\times P + \frac{i\times C\times f}{n}\times\left(\ell\times n - \frac{\ell\times(\ell-1)}{2}\right) \qquad (17)$$

Portanto, no caso do nosso exemplo numérico, tem-se:

$$S_{10} = 200000 - 10\times 4118,40 + \frac{0,01\times 200000\times 0,77220077}{60}\times\left(10\times 60 - \frac{10\times 9}{2}\right)$$

$$S_{10} = R\$173.101,71$$

Devendo-se notar que, alternativamente, o método de recorrência pode ser interpretado como se o saldo devedor na época *k*, seja igual ao valor acumulado, com juros, se nada houvesse sido pago, subtraído do valor acumulado, com juros, das *k* prestações já pagas. Ou seja, deveríamos ter:

$$S_k = C\times(1+i\times k) - \sum_{j=1}^{k} P\left\{1+i\times(k-j)\right\}$$

O que, no caso que estamos considerando, acarretaria que o saldo devedor, assim apurado, fosse igual a R$ 176.962,72

Entretanto, como já anteriormente observado, não se estaria levando em conta que cada prestação deve ser subdividida nas respectivas parcelas capitalizáveis e não capitalizáveis.

### 2.2 Data Focal no Início do Financiamento

Agora, a equivalência financeira entre o valor *C* do financiamento, e o da sequência de prestações, estabelece que:

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{P'}{1+k\times i} = P' \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k\times i} \qquad (18)$$

onde a prestação constante é agora denotada por $P' = P_1', P_2', \ldots, P_n'$..

Ocorre que, no caso de *n* períodos, o desenvolvimento analítico da solução da equação (17) é dado por:

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k'}{(1+k\times i)} = P'\times\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k\times i)} = P'\times\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+2i)} + \ldots + \frac{1}{(1+n\times i)}\right]$$

$$C = P'\times\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\prod_{\ell=1}^{n}\left[1+(\ell\times i)\right]}{(1+k\times i)}\right]\right\} / \left\{\prod_{\ell=1}^{n}\left[1+(\ell\times i)\right]\right\}$$

ou seja

$$P' = C\times\left\{\prod_{\ell=1}^{n}\left[1+(\ell\times i)\right]\right\} / \left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\prod_{\ell=1}^{n}\left[1+(\ell\times i)\right]}{(1+k\times i)}\right]\right\} \qquad (18')$$

Constata-se, portanto, que o tratamento analítico da relação (17') é efetivamente impraticável. Especialmente no caso de prestações mensais e prazos medidos em anos.

No que se segue, para que se tenha um exemplo concreto, iremos focar atenção no caso do financiamento que foi considerado na seção 3.1.1.

### *2.2.1 Exemplo Numérico*

Reconsidere-se o caso do financiamento de R$ 200.000,00, pelo prazo de 60 meses, à taxa de juros simples de 1% a.m., e prestações mensais constantes.

Fazendo uso das funções MULT (produtório) e SOMA (somatório) da planilha Excel, pode-se determinar que o valor da prestação mensal constante, solução da equação (17'), é R$ 4.272,283685. Valor este que, deve ser observado, não depende do fator *f* de ponderação.

Então, tendo presente que a prestação constante $P'$ é subdividida nas componentes $P^C$ e $P^N$, respectivamente dadas pelas relações (5) e (11), decorre que se tenha:

$$4272,283685 = \frac{200000}{60}\left\{1 + \frac{f \times 0,01 \times (60+1)}{2}\right\}$$

ou seja *f* = 0,92355772

Portanto, tem-se que $P^C = R\$3.078,53$ e $P^N = R\$1.193,76$.

No quadro 2, tendo presente as relações (7), (11), com $P^C = A_i^C$ e (6), e que $S_k = S_k^C + S_k^N$, temos a evolução do financiamento ao longo dos 60 meses.

| Época (*k*) | Juros | ANC | ACAP | PNC | PCAP | SNC | SCAP | Saldo Final |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | 15.288,46 | 184.711,54 | 200.000,00 |
| 1 | 1.847,12 | -653,36 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 15.941,81 | 181.633,02 | 197.574,83 |
| 2 | 1.816,33 | -622,57 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 16.564,39 | 178.554,49 | 195.118,88 |
| 3 | 1.785,54 | -591,79 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 17.156,17 | 175.475,97 | 192.632,14 |
| 4 | 1.754,76 | -561,00 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 17.717,17 | 172.397,44 | 190.114,62 |
| 5 | 1.723,97 | -530,22 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 18.247,39 | 169.318,92 | 187.566,31 |
| 6 | 1.693,19 | -499,43 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 18.746,82 | 166.240,39 | 184.987,21 |
| 7 | 1.662,40 | -468,65 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 19.215,47 | 163.161,86 | 182.377,33 |
| 8 | 1.631,62 | -437,86 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 19.653,33 | 160.083,34 | 179.736,67 |
| 9 | 1.600,83 | -407,08 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 20.060,40 | 157.004,81 | 177.065,22 |
| 10 | 1.570,05 | -376,29 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 20.436,69 | 153.926,29 | 174.362,98 |
| 11 | 1.539,26 | -345,50 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 20.782,20 | 150.847,76 | 171.629,96 |
| 12 | 1.508,48 | -314,72 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 21.096,92 | 147.769,24 | 168.866,15 |
| 13 | 1.477,69 | -283,93 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 21.380,85 | 144.690,71 | 166.071,56 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| 56 | 153,93 | 1.039,83 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 4.467,18 | 12.314,10 | 16.781,28 |
| 57 | 123,14 | 1.070,62 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 3.396,56 | 9.235,58 | 12.632,14 |
| 58 | 92,36 | 1.101,40 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 2.295,16 | 6.157,05 | 8.452,21 |
| 59 | 61,57 | 1.132,19 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 1.162,97 | 3.078,53 | 4.241,50 |
| 60 | 30,79 | 1.162,97 | 3.078,53 | 1.193,76 | 3.078,53 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

**Quadro 2:** Evolução do Financiamento no Caso da Data Focal no Início do Prazo

### *2.2.2 Consistência Financeira*

Fazendo uso do já apresentado na seção (3.1.2), iremos constatar, fixando ainda atenção na época de vencimento da 10ª prestação, a presença da consistência financeira quando se faz uso dos clássicos métodos retrospectivo, prospectivo e de recorrência.

**a) O Método Retrospectivo**

De acordo com a relação (13’), e tendo presente que $A^C = P^C = R\$3.078,53$, tem-se:

$$S_{10} = \left[\begin{array}{l} 200000 - 10\times 3078,53 - (-653,36 - 622,57 - 591,79 - 561,00 \\ \quad - 530,22 - 499,43 - 468,65 - 437,86 - 407,08 - 376,29) \end{array}\right.$$

$$S_{10} = R\$174.362,95$$

**b) O Método Prospectivo**

Agora, de acordo com a relação (15’), tem-se:

$$S_{10} = (60-10)\times 4272,2837 - 1539,26 - 1508,48 \cdots - 30,74 = R\$174.362,98$$

**c) O Método de Recorrência**

Fazendo uso da relação (16), tem-se:

$$S_{10} = 200000 - 10\times 4272,2837 + \frac{0,01\times 200000\times 0,923557723}{60}\times\left(10\times 60 - \frac{10\times 9}{2}\right)$$

$$= R\$174.362,98$$

Ou seja, constata-se que, também no caso de data focal na época zero, se mantém presente o conceito de consistência financeira.

## 3. CONFRONTO ENTRE AS DUAS SOLUÇÕES

Tendo em vista o discutido em de Faro (2013), sabemos que $P' > P$ se $n \geq 2$. Com o intuito de prover uma constatação numérica, o Quadro 3, considerando o financiamento de R$ 200.000,00, para distintas taxas de juros simples i, e para distintos prazos mensais n, apresenta um conjunto de valores da razão $P'/P$.

| | Razão Prestação Início/Final | | | |
|---|---|---|---|---|
| Taxa | n=60 | n=120 | n=180 | n=240 |
| 1% | 1,04 | 1,11 | 1,19 | 1,27 |
| 2% | 1,11 | 1,27 | 1,44 | 1,60 |
| 3% | 1,19 | 1,44 | 1,69 | 1,93 |
| 4% | 1,27 | 1,61 | 1,93 | 2,23 |
| 5% | 1,36 | 1,77 | 2,16 | 2,53 |
| 7% | 1,53 | 2,09 | 2,61 | 3,11 |
| 9% | 1,70 | 2,40 | 3,04 | 3,65 |
| 10% | 1,78 | 2,55 | 3,25 | 3,92 |

**Quadro 3:** Comparação entre os Valores da Razão $P'/P$

Os Gráficos 1 e 2 mostram a evolução das prestações totais (prestação capitalizável somada a não capitalizável), para um financiamento de R$ 200.000,00, em função da variação da taxa de juros e do número de meses do prazo *n*, com ponto focal no início e final do financiamento.

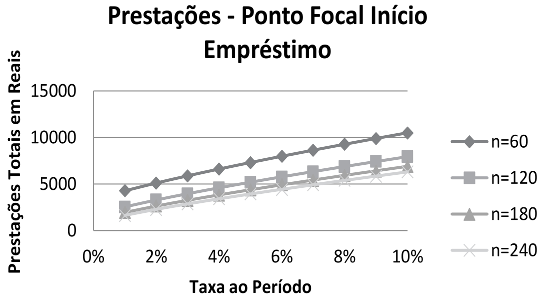


**Gráfico 1:**

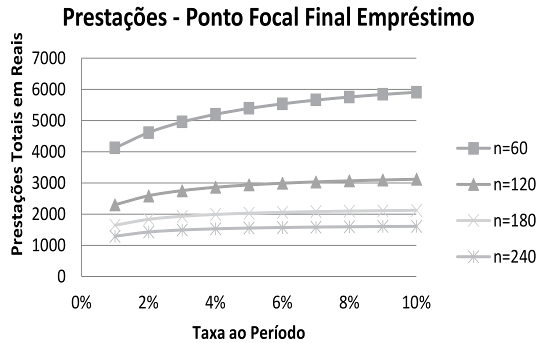


**Gráfico 2:**

Como se constata, as diferenças podem ser substanciais.

## 4. COMPARAÇÃO COM O CHAMADO “MÉTODO DE GAUSS”

Frisando que não é apropriado associar ao nome do grande matemático alemão, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o procedimento proposto, entre outros, por Antonick e Assunção (2006), Rovina (2009) e Nogueira (2013), que também considera a data do último pagamento como data focal, estabelece que o valor da prestação constantes P seja exatamente o mesmo obtido pela relação (12’).

A principal diferença é que, segundo aqueles proponentes, seja feito uso do que foi chamado de “índice de ponderação”, denotado por I. O qual deve ser observado, é distinto do fator de ponderação, ***f***, proposto por Forger (2009).

É suposto que se tenha:

$$I = 2\times i\times C / \{ n\times [2 + i\times (n-1)] \} \qquad (19)$$

Sendo que, agora, as parcelas de juros e de amortização, componentes da prestação que se vence na época *k*, respectivamente denotadas por $J_k$ e $A_k$, são tais que:

$$\hat{J}_k = (n-k+1)\,I \qquad (20)$$

e

$$\hat{A}_k = P - \hat{J}_k \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n \qquad (21)$$

Com o saldo devedor na época *k*, agora denotado por $\hat{S}_k$, sendo dado por:

$$\hat{S}_k = C \times \left\{1 - k \times \left[2 + i \times (k-1)\right] / \left\{n \times \left[2 + i \times (n-1)\right]\right\}\right\}, \quad k = 1,2\ldots n \qquad (22)$$

Assim, considerando o exemplo prático da seção 4.1, quando C = R$ 200.000,00, pelo prazo *n* = 60 meses, taxa mensal de juros simples *i* = 1% a.m., temos que, como já visto, *P* = R$ 4.118,40.

Do que decorre que o saldo devedor logo após o pagamento da 10ª prestação, segundo a relação (22), seja $\hat{S}_{10}$ = *R*$ 176.101,67.

Portanto, sem que seja necessário fazer-se uso de componentes capitalizáveis e não capitalizáveis, teremos o mesmo valor para o saldo devedor na época imediatamente posterior à de pagamento da 10ª prestação. Tal como foi numericamente apurado na seção 3.1.2.

Poder-se-ia concluir, portanto, não ter sido necessária a argumentação sobre consistência financeira desenvolvida na seção 3.1.2.

Todavia, acreditamos que ela permanece pertinente. Pois que apresenta suporte para a validade dos três métodos clássicos de apuração do saldo devedor. O que não ocorre na implementação estrita do chamado "método de Gauss".

## 5. PONTO DE VISTA DO FINANCIADOR

Tendo presente a recorrente controvérsia sobre a ocorrência ou não de anatocismo no emprego da Tabela Price, como se constata em Jusbrasil (2022), com sentenças judiciais prescrevendo sua substituição pelo que tem sido denominado como "método de Gauss", faz-se pertinente que a questão seja analisada sob a ótica da instituição financiadora.

Considere-se, portanto, a situação em que uma certa instituição financeira que, objetivando manter sua rentabilidade, tal como expressa em termos da taxa mensal *i* de juros compostos, queira precaver-se da eventualidade de que, por força de uma decisão judicial, seja obrigada a substituir um financiamento de *C* unidades de capital, pelo prazo de *n* meses, contratado segundo a Tabela Price, pelo que tem sido denominado de "método de Gauss".

Ora, no contrato de financiamento, tal como originalmente pactuado por mutuário e mutuante, o valor da prestação mensal $\hat{P}$ teria sido calculado, conforme de Faro e Lachtermacher (2012, p.241), segundo a relação clássica:

$$\hat{P} = C \times i \,/ \left[1 - (1+i)^{-n} - 1\right] \qquad (23)$$

Entrando com o valor de $\hat{P}$ assim calculado, na relação (12'), obtém-se que a taxa mensal de juros $\hat{i}$ que deverá ser explicitada em contrato é tal que, como já anteriormente apresentado em de Faro (2016):

$$\hat{i} = 2 \times \left(C - n \times \hat{P}\right) / \left\{n \times \left[(n-1) \times \hat{P} - 2C\right]\right\} \qquad (24)$$

ou

$$\hat{i} = \frac{2 \times \left[1 - (1+i)^{-n} - n \times i\right]}{n \times \left\{(n-1) \times i - 2 \times \left[1 - (1+i)^{-n}\right]\right\}} \qquad (24')$$

devendo ser observado que a expressão acima não depende do valor *C* do financiamento.

Deste modo, se, por exemplo, para um contrato de financiamento de R$100.000,00, pelo prazo de *n* = 10 anos, com prestações mensais constantes, de acordo com a Tabela Price, o que implica em $\hat{P}$ = R$1.434,71, se a instituição financeira deseja que seja assegurada que a taxa mensal de juros que expressa sua rentabilidade seja mantida no valor *i* = 1% a.m., deve especificar no contrato a taxa mensal de juros $\hat{i}$ igual a:

$$\hat{i} = \frac{2 \times \left[1 - (1+0,01)^{-120} - 120 \times 0,01\right]}{120 \times \left\{(120-1) \times 0,01 - 2 \times \left[1 - (1+0,01)^{-120}\right]\right\}} = 0,041092$$

Ou seja, mantida a Tabela Price, o contrato teria que especificar a taxa mensal de juros de 4,1092%. O que, provavelmente, faria que a instituição financeira não conseguisse celebrar o contrato. Pois que estaria cobrando taxas de juros muito superiores às praticadas no mercado.

No Quadro 4, a seguir apresentado, que se refere ao caso de um financiamento de R$ 100.000,00 que seja contratado segundo a Tabela Price, à taxa mensal *i* = 1% e pelo prazo de n anos, com prestações mensais iguais a $\hat{P}$, como dados pela relação (22), temos a evolução dos correspondentes valores de *P* e de $\hat{i}$, respectivamente dados pelas relações (12') e (23), quando se varia o prazo do financiamento.

| $n$ (anos) | $\hat{P}$ (R$) | $P$ (R$) | $\hat{i}$ (% a.m) |
|---|---|---|---|
| 1 | 8.884,88 | 6.951,03 | 1,08 |
| 2 | 4.701,35 | 4.633,98 | 1,18 |
| 3 | 3.321,43 | 3.215,13 | 1,30 |
| 4 | 2.633,38 | 2.496,63 | 1,44 |
| 5 | 2.224,44 | 2.059,20 | 1,62 |
| 10 | 1.434,71 | 1.149,34 | 4,11 |
| 11 | 1.367,72 | 1.061,98 | 3,86 |
| 12 | 1.313,42 | 988,01 | 10,16 |
| 13 | 1.268,67 | 924,52 | 37,40 |
| 14 | 1.231,43 | 869,34 | n.a |

**Quadro 4:** Evolução dos Valores de $\hat{P}$, *P* e de $\hat{i}$

Como se depreende do apresentado no Quadro 4, até o caso do prazo de 5 anos, o valor da taxa $\hat{i}$ não excede de muito a taxa *i* que representa a rentabilidade da instituição financeira que estaria concedendo o financiamento.

Porém, à medida que se aumenta o prazo anual do financiamento, a taxa *i* que a instituição financeira teria que cobrar em seus contratos, passa a assumir valores impraticáveis.

Ainda mais, na eventualidade em que o prazo do financiamento alcançasse o prazo de 14 anos, o valor da taxa de juros simples $\hat{i}$, tal como derivado pela relação (23'), assumiria um valor negativo (-22,53% a.m.). O que, obviamente, não faz nenhum sentido.

Cumpre ainda ressaltar uma outra característica negativa associada ao que tem sido chamado de "método de Gauss". Característica esta que já havia sido anteriormente apontada em de Faro (2016) e, também, posteriormente, em De-Losso, Santos e Cavalcante Filho (2020).

Tomando-se o limite, para quando a taxa periódica de juros simples *i*, tende a infinito, segue-se, da relação (12'), que:

$$\lim_{i\to\infty} P = \lim_{i\to\infty} \frac{2C\times(1+i\times n)}{n\times\left[2+i\times(n-1)\right]} = \frac{2C}{n-1} \qquad (25)$$

Como consequência, considere-se, a título de ilustração, o caso de uma instituição financeira que, para o financiamento de R$ 100.000,00, pelo prazo de 30 anos e prestações mensais constantes, fizesse uso do "método de Gauss".

Tendo em vista a relação (24), por maior que fosse a taxa de juros especificada, o valor da prestação não iria superar o valor de R$ 357,10.

Ora, em tal eventualidade, como observado por Bueno, Santos e Cavalcante (2020), segue-se, da relação (22), que a taxa de rentabilidade da instituição financeira seria de 0,44% a.m. Taxa esta que é inferior à taxa mensal da captação em caderneta de poupança. Ou seja, a instituição financeira teria prejuízo na operação.

Um problema adicional, que também ocorre no caso em que a data focal é a época da concessão do financiamento, é que o acréscimo devido a juros, no primeiro período, que é dado pelo produto $i\times C$, pode superar, para prazos longos, os correspondentes valores das prestações $P$ e $P'$.

## CONCLUSÃO

Em sendo estipulado, por via de sentença judicial, que um financiamento, originalmente contratado de acordo com a Tabela Price, seja substituído por um contrato com base no regime de juros simples, também com prestações periódicas constantes, avaliaram-se aqui duas distintas versões. As quais, fazendo uso de sugestões apresentadas por Forger (2009), têm como fundamento os conceitos de componentes capitalizáveis e não capitalizáveis.

Vale lembrar que, como mencionado por Bueno, Santos e Cavalcante Filho (2020), é prescrita no parágrafo 1º, do artigo 15-B da Lei 4.380/64, o uso da data focal no início do período de financiamento deveria ser observado. O que não ocorre quando decisões judiciais prescrevem a adoção método de Gauss.

Evidenciou-se que o princípio de consistência financeira, que postula que os resultados respectivamente obtidos segundo os métodos retrospectivo, prospectivo e de recorrência, para apuração do saldo devedor, sejam coincidentes, são observados em ambas as datas focais estudadas.

Não obstante, reitera-se aqui que, em nossa opinião, a prescrição da obrigatoriedade do emprego do regime de juros simples, implica em que seja violada a questão relativa à propriedade de cindibilidade do prazo de aplicação. Que é uma propriedade que só está presente quando se adota a regime de juros compostos.

## REFERÊNCIAS


ANTONIK, Luis Roberto; ASSUNÇÃO, Márcio da Silva. Tabela Price e Anatocismo. **Revista de Administração da Unimep**, Piracicaba, v. 4, n. 1, p. 120-126, jan. 2006. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2737/273720432007.pdf. Acesso em: 05 dez. 2022.

AYRES, Frank. **Mathematics of finance**. New York: McGraw-Hill, 1963.

BUENO, Rodrigo de Losso da Silveira; SANTOS, José Carlos de Souza; CAVALCANTE FILHO, Elias. As Inconsistências do Método de Gauss-Nogueira. **Fipe**, [s. l], 1-14, jan. 2020. Disponível em: https://downloads.fipe.org.br/publicacoes/bif/bif472-8-21.pdf. Acesso em: 06 dez. 2022.

FARO, Clovis de. Amortização de dívidas e prestações constantes: uma análise crítica. **Fgv Epge - Ensaios Econômicos**, Rio de Janeiro, v. 50, n. 746, p. 1-30, nov. 2013. Disponível em: https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/10438/11232/AMORTIZA%c3%87%c3%83O%20DE%20D%c3%8dVIDAS%20E%20PRESTA%c3%87%c3%95ES%20CONSTANTES.pdf?sequence=6&isAllowed=y. Acesso em: 05 dez. 2022.

__________. Sistemas de Amortização: O Conceito de Consistência Financeira e Suas Implicações. **Revista de Economia e Administração**, v. 13, n. 3, p. 376-391, mar. 2014. Disponível em: https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/10438/11547/Sistemas-de-Amortizacao-o-Conceito-de-Consistencia-Financeira-e-Suas-Implicacoes.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 05 dez. 2022.

___________. Financial Implications of the Gauss method, **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, v. 6, n. 2, p. 179-188, 2016.

FARO, Clóvis de; LACHTERMACHER, Gerson. **Introdução à matemática financeira**. Rio de Janeiro: Atlas: FGV, 2012. 397p, il.

FORGER, Frank Michael. **Saldo capitalizável e saldo não capitalizável:** novos algoritmos para o regime de juros simples. São Paulo:USP, 2009.

NOGUEIRA, José Jorge Meschiatti. **Tabela Price:** mitos e paradigmas. 3. ed. Campinas: Millennium Editora, 2013.

ROVINA, Edson. **Uma nova visão da matemática financeira**. Campinas: Millennium Editora, 2009.

WILKIE, D., "**The Theory of Interest, Simple and Compound**", Edinbourg, 1794.