

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO NO REGIME DE JUROS SIMPLES: UMA METODOLOGIA GERAL

PROF. DR. GERSON LACHTERMACHER¹
PROF. DR. CLOVIS DE FARO²

RESUMO

No sistema Financeiro de Habitação, as modalidades de financiamento mais empregadas são a Tabela Price, o Sistemas de Amortizações Constantes e, mais recentemente, tendo sido introduzido pela Caixa Econômica Federal, o Sistema de Amortizações Crescentes (SACRE). Entretanto, por serem fundamentados no regime de juros compostos, tem sido corrente decisões judiciais determinando suas respectivas substituições segundo os ditames do regime de juros simples. Contemplando tais eventualidades, desenvolve-se uma metodologia geral que possibilita, em cada caso, a determinação numérica da correspondente evolução do plano de financiamento.

Palavras-chave: sistemas de amortização em juros simples; metodologia geral; solução numérica.

ABSTRACT

In the Brazilian Housing Financing System (SFH), the amortization schemes that are usually employed are Constant Payments, which in Brazil is known as Tabela Price, Constant Amortization, and, more recently, Crescent Amortization (SACRE), which was introduced by Caixa Econômica Federal (CEF). However, as they are based on compound interest, it has been recurrently judicially determined to be substituted by corresponding systems based on simple interest. Taking into account these judicial decisions, it is developed a general methodology that allows, in each case, the corresponding numerical determination of the evolution of the financial plan.

Keywords: simple interest amortization systems. general methodology; numerical solution.

¹ Doutor em Management Sciences - University of Waterloo (1993). Foi diretor de Gestão Acadêmica do IDE da Fundação Getúlio Vargas e professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro e Universidade Federal do Rio de Janeiro. Tem experiência na área de Administração, atuando principalmente nos seguintes áreas: Finanças, Redes Neurais, Mineração de Dados e Pesquisa Operacional. Contato: glachter@gmail.com

² Ph.D. em Engenharia Industrial, Universidade de Stanford, Pós-Doutorado pela Universitat München, U.M, Alemanha em Engenharia Econômica e Pesquisa Operacional (1981). Contato: clovis.faro@fgv.br.

1. INTRODUÇÃO

Muito embora o regime de juros compostos seja o prevalente na literatura técnica pertinente, praticamente em escala universal, cf. Ayres (1963), de Finetti (1969), Butcher e Nesbitt (1971), Hummell e Seebeck (1956), Kellison (1991), Kosiol (1973) e McCutcheon e Scott (1993) e, tanto quanto se saiba, não seja objeto de contestações judiciais no que concerne aos seus princípios, o mesmo não ocorre aqui no Brasil.

Ao contrário, em nossos tribunais são extremamente frequentes demandas relativas a, especialmente, financiamentos habitacionais. Em particular, quando se trata do emprego da popularmente chamada Tabela Price; que se caracteriza por especificar prestações constantes. Neste contexto, é oportuno destacar a recente análise desenvolvida por Drezza (2021). Que apresenta oportunas considerações sobre a denominada ADI nº 2.316, que foi apreciada pelo Supremo Tribunal Federal. Sendo que esta ADI nº 2.316, já havia sido objeto de estudo efetuado por de Faro e Guerra (2014), evidenciando inadequações que são intrínsecas ao regime de juros simples.

Ademais, conforme mencionado por Drezza (2021), cumpre salientar que a Ministra relatora, Maria Isabel Galloti, em pronunciamento desafetado em 08 de fevereiro de 2019, declarou que “o STF dá um cheque em branco para tribunais...dizerem que a Tabela Price é ilegal”. Como consequência, dá-se ensejo para que tribunais venham propor a substituição da Tabela Price pelo que se tem denominado de “Método de Gauss”, como sugerido por Nogueira (2008). Que, conforme analisado em de Faro (2016) e em De-Losso, Santos e Cavalcante Filho (2020), é um procedimento com evidentes inconsistências financeiras.

Nosso propósito aqui, fazendo uso do que foi proposto por Forger (2009 e 2010), é apresentar sistemas de amortização que, com fulcro no regime de juros simples, se conformam com o conceito de consistência financeira; tal como discutido em de Faro (2014), para o caso do regime de juros compostos.

Fique claro, porém, que, em nossa opinião, o mais correto é a manutenção do universalmente consagrado regime de juros compostos. Ou seja, o

aqui sugerido só deve ser implementado se ocorrer decisão judicial que, explicitamente, determine a adoção do regime de juros simples.

2. PARCELAS CAPITALIZÁVEIS E NÃO-CAPITALIZÁVEIS

Seja um financiamento de valor C , que deve ser resgatado mediante o pagamento de n prestações periódicas e postecipadas, com a k -ésima sendo denotada por P_k , para $k=1,2,\dots, n$, contratado à taxa periódica de juros i . Onde n denota o prazo do financiamento, expresso em número de períodos.

Diferentemente do caso onde a taxa de juros i é de juros compostos, o saldo devedor na época k , denotado por S_k , logo após o pagamento de P_k , não precisa de qualificação adicional, o mesmo não ocorre se a taxa de juros i do financiamento for especificada como de juros simples.

Na eventualidade de adoção do regime de juros simples, é necessário que, seguindo Forger (2009 e 2010), o saldo devedor S_k seja admitido como sendo constituído de duas parcelas. Ou seja, deve-se distinguir o que se denomina de saldo devedor capitalizável, que na época k é denotado por S_k^C , do que é chamado de saldo devedor não-capitalizável, que na época k é denotado por S_k^N . De tal modo que:

$$S_k = S_k^C + S_k^N \quad (1)$$

com $S_0 = C$

Analogamente, ainda no caso onde a taxa de juros i é de juros simples, deve-se fracionar a parcela de amortização A_k , associada à k -ésima prestação, em duas componentes. Uma parcela, dita capitalizável, denotada por A_k^C , e uma parcela não capitalizável, denotada por A_k^N . De tal modo que:

$$A_k = A_k^C + A_k^N \quad (2)$$

Da mesma forma, a k -ésima prestação P_k é também subdividida em duas parcelas. A primeira, denotada como P_k^C , sendo denominada como referente à parcela capitalizável da prestação. Com a segunda, dita relativa à parcela não-capitalizável, denotada como P_k^N . Ou seja:

$$P_k = P_k^C + P_k^N \quad (3)$$

Relativamente à parcela de juros J_k , que compõe a prestação P_k , é estabelecido que:

$$J_k = i \times S_{k-1}^C \quad (4)$$

Ou seja, segundo um critério de apropriação linear, a taxa de juros simples i incide somente sobre a parte capitalizável de saldo devedor.

Estabelece-se também que:

$$S_k = S_{k-1} - A_k \quad (5)$$

$$S_k^C = S_{k-1}^C - A_k^C = S_{k-1}^C - P_k^C \Rightarrow A_k^C = P_k^C \quad (6)$$

$$S_k^N = S_{k-1}^N - A_k^N = S_{k-1}^N + J_k - P_k^N \Rightarrow A_k^N = P_k^N - J_k \quad (7)$$

com a condição de que se tenha $S_n = S_n^C = S_n^N = 0$. Sendo que as relações de (1) a (7) são válidas para $k=1,2,\dots,n$.

3. A QUESTÃO DA DATA FOCAL

Como o regime de juros simples não goza da propriedade de cindibilidade do prazo de aplicação, que é uma característica fundamental do regime de juros compostos, é necessário que a equivalência financeira entre o valor C do financiamento e a sequência de prestações seja estabelecida explicitando-se uma particular data de comparação. Data esta que, conforme Ayres (1963), é denominada de data focal. Sendo que aqui, alternativamente, também denominaremos de ponto focal.

Em função da data focal escolhida, é estabelecido um fator f , denominado por Forger (2009) de fator de ponderação, com $0 \leq f \leq 1$, de tal modo que se tenha:

$$S_0^C = C \times f \quad (8)$$

e

$$S_0^N = C \times (1 - f) \quad (9)$$

Definindo-se

$$P_k^C = \frac{C}{n} \times f = P^C \quad (10)$$

decorre que o saldo capitalizável decresce linearmente de modo que:

$$S_k^C = C \times f - \sum_{\ell=1}^k P_\ell^C = C \times f - k \times P^C$$

logo

$$S_k^C = C \times f \times \left(\frac{n-k}{n} \right) \quad (11)$$

e, tendo em vista a relação (4), segue-se que

$$J_k = C \times f \times \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \times i \quad (12)$$

Quanto às expressões do saldo devedor S_k e do saldo devedor não-capitalizável S_k^N , é necessário que seja explicitado como a prestação P_k é subdividida nas componentes P_k^C e P_k^N .

Assim, por exemplo, se for estabelecido que as prestações sejam constantes, teremos $P^C = P_k^C = A_k^C = A^C$, e $P^N = P_k^N$, independentemente da época k . Enquanto que, se for adotado que se tenham amortizações constantes, ter-se-á $P^C = P_k^C = A_k^C = A^C$, e $A^N = A_k^N$, independentemente da época k .

Deste modo, segundo o critério de apropriação linear, o saldo devedor não-capitalizável, tal como demonstrado por Forger (2009), evolui de tal forma que:

$$S_k^N = C \times (1 - f) - i \times \sum_{\ell=1}^k (k - \ell) \times P_\ell^N - \sum_{\ell=1}^k (P_\ell^N - C \times i \times f) \quad (13)$$

Do que decorre que se tenha, tendo em vista (1):

$$S_k = C - \sum_{\ell=1}^k [1 + i \times (k - \ell)] \times P_\ell^C - \sum_{\ell=1}^k (P_\ell^N - C \times i \times f) \quad (14)$$

com

$$A_k^N = P_k^N - C \times f \times i + [(k-1) \times P^C \times i] \quad (15)$$

Até aqui, nada foi dito sobre a data focal que estabelece a equivalência financeira entre a sequência de prestações e o valor do financiamento. O fator f de ponderação depende tanto da data focal, como do particular sistema de amortização que seja especificado.

Ao invés de buscar desenvolver uma expressão analítica para cada data focal, para cada um dos sistemas de amortização mais usuais, o de prestações constantes (SPC), o de amortizações constantes (SAC) e o de amortizações crescentes (SACRE), iremos estabelecer uma metodologia geral para a determinação do fator f de ponderação. Tal esforço se faz necessário pois em dependendo da data focal e sistema de amortização escolhido é praticamente impossível a determinação analítica do fator f .

4. O CASO DE PRESTAÇÕES CONSTANTES (SPC)

Como as prestações são constantes, teremos $P^C = P_k^C = A_k^C = A^C$ e $P^N = P_k^N$. Ou seja, estas componentes não dependem da época k .

Como consequência, tem-se que:

$$S_k^N = C \times (1-f) - \left[k \times (P^N - C \times f \times i) \right] \left\{ (C \times f \times i) \times \left[\frac{k \times (k-1)}{2 \times n} \right] \right\} \quad (16)$$

$$e \quad P^N = \frac{C \times (1-f)}{n} + \frac{C \times f \times i}{2} \times \left(\frac{n+1}{n} \right) \quad (17)$$

Levando em conta a característica de que, no regime de juros simples, o prazo é não-cindível, iremos abordar duas distintas datas focais.

A primeira data focal é a data de concessão do financiamento, época zero. Sendo que, como observado em De-Losso, Santos e Cavalcante Filho (2020), é a que decorre do prescrito no parágrafo 1º do artigo 15-B da Lei 4.380/64. Para esta data focal temos que as prestações constantes devem ser tais que se tenha:

$$C = \sum_{k=1}^n \frac{P}{1+i \times (n-1) \times k} \quad (18)$$

Relativamente à segunda, que toma como data focal a época do pagamento da última prestação, o valor de P deve ser tal que:

$$C \times (1+i \times n) = P \times \sum_{k=1}^n [1+i \times (n-k)] \quad (19)$$

Com a peculiaridade de que esta tem sido estabelecida em sentença judiciais que prescrevem a adoção do que tem sido chamado de "Método de Gauss".

Vamos estudar apenas estas duas possibilidades, pois são as mais representativas.

4.1 O Caso da Data Focal como a de Concessão do Financiamento

Na eventualidade que se tome como data focal a de concessão do financiamento, época zero, o primeiro passo do procedimento sugerido por Forger (2009) é o de determinar o valor do fator f de ponderação.

Com este propósito, buscando uma apresentação que exemplifique cada uma das três possibilidades mais usuais de sistemas de amortização, iremos considerar o caso de um financiamento C de R\$ 360.000,00, com a taxa de juros simples i de 1% a.m. e com o prazo n de 36 meses.

Para este caso utilizaremos a equação (18), acoplada com as relações (10) e (17), para determinar os valores de P e do fator de ponderação. Isto é, iremos determinar os valores de P e de f que tornam válida a equação de equivalência financeira.

O procedimento aqui proposto para determinar os valores de P e de f é apresentado nas figuras 1, 2, 3 e 4. A planilha utilizada e as fórmulas introduzidas em cada célula são descritas nas Figuras 1 e 2. Partimos de um valor para $f = 0$.

	A	B	C	D	E	F
1	SPC - JS		F=	0,0000000000	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa a.p.=	1%		
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	306164,9981
4	0					
5	1	10000	0	10000	0,99009901	9900,990099
6	2	10000	0	10000	0,980392157	9803,921569
7	3	10000	0	10000	0,970873786	9708,737864
8	4	10000	0	10000	0,961538462	9615,384615
9	5	10000	0	10000	0,952380952	9523,809524
10	6	10000	0	10000	0,943396226	9433,962264
11	7	10000	0	10000	0,934579439	9345,794393
12	8	10000	0	10000	0,925925926	9259,259259
13	9	10000	0	10000	0,917431193	9174,311927
14	10	10000	0	10000	0,909090909	9090,909091

Figura 1: Parte da Planilha Inicial – SPC-JS – Ponto Focal 0

	A	B	C	D	E	F
1	SPC - JS		F= 0		n= 36	
2	Capital	360000	taxa a.p.= 0,01			
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	=SOMA(F5:F40)
4	0					
5	1	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B5+C5	$=1/(1+\$D\$2*A5)$	=D5*E5
6	2	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B6+C6	$=1/(1+\$D\$2*A6)$	=D6*E6
7	3	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B7+C7	$=1/(1+\$D\$2*A7)$	=D7*E7
8	4	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B8+C8	$=1/(1+\$D\$2*A8)$	=D8*E8
9	5	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B9+C9	$=1/(1+\$D\$2*A9)$	=D9*E9
10	6	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B10+C10	$=1/(1+\$D\$2*A10)$	=D10*E10
11	7	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B11+C11	$=1/(1+\$D\$2*A11)$	=D11*E11
12	8	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B12+C12	$=1/(1+\$D\$2*A12)$	=D12*E12
13	9	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B13+C13	$=1/(1+\$D\$2*A13)$	=D13*E13
14	10	$=\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	$=\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B14+C14	$=1/(1+\$D\$2*A14)$	=D14*E14

Figura 2: Parte das Fórmulas da Planilha Inicial – SPC-JS – Ponto Focal 0

Vale ressaltar que as células de B5 até B40 apresentam os valores constantes das 36 prestações não capitalizáveis. Enquanto as células de C5 até C40 apresentam os respectivos valores constantes das prestações capitalizáveis.

As células F3 e B2 representam os lados direito e esquerdo da equação (18) de equivalência. A célula D1 representa o valor do fator de ponderação que desejamos determinar; iniciado com o valor zero. Precisamos agora determinar o valor de *f* que iguale F3 a B2.

Para tal utilizaremos a função atingir meta do Excel ©. A Figura 3 mostra a janela do atingir

meta utilizada para determinar a solução desejada (Figura 4)

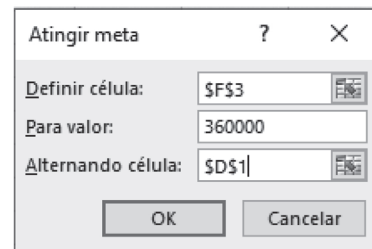


Figura 3: Janela de Parâmetros da Função Atingir Meta

	A	B	C	D	E	F
1	SPC - JS		F=	0,9504679237	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa a.p.=	1%		
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	360000
4	0					
5	1	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,99009901	11641,9462
6	2	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,980392157	11527,80947
7	3	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,970873786	11415,88899
8	4	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,961538462	11306,12083
9	5	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,952380952	11198,44348
10	6	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,943396226	11092,79779
11	7	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,934579439	10989,12678
12	8	2253,686421	9504,6792	11758,36566	0,925925926	10887,37561

Figura 4: Parte da Solução do Valor de Ponderação – SPC – JS – Ponto Focal 0

Uma vez determinado o valor da prestação constante P , bem como os das suas parcelas P^c e

P^n , pode-se definir a planilha completa da evolução do financiamento. O que é apresentado no Quadro 1.

SPC-JS		fator Pond.=0,950467923745			Taxa a.p.=1%		nº períodos=36	
Época	Juros	ANC	ACAP	PNC	PCAP	SNC	SCAP	Saldo Final
0						17.831,55	342.168,45	360.000,00
1	3.421,68	-1.168,00	9.504,68	2.253,69	9.504,68	18.999,55	332.663,77	351.663,32
2	3.326,64	-1.072,95	9.504,68	2.253,69	9.504,68	20.072,50	323.159,09	343.231,59
3	3.231,59	-977,90	9.504,68	2.253,69	9.504,68	21.050,40	313.654,41	334.704,82
4	3.136,54	-882,86	9.504,68	2.253,69	9.504,68	21.933,26	304.149,74	326.082,99
5	3.041,50	-787,81	9.504,68	2.253,69	9.504,68	22.721,07	294.645,06	317.366,13
6	2.946,45	-692,76	9.504,68	2.253,69	9.504,68	23.413,83	285.140,38	308.554,21
7	2.851,40	-597,72	9.504,68	2.253,69	9.504,68	24.011,55	275.635,70	299.647,25
8	2.756,36	-502,67	9.504,68	2.253,69	9.504,68	24.514,22	266.131,02	290.645,24
:	:	:	:	:	:	:	:	:
29	760,37	1.493,31	9.504,68	2.253,69	9.504,68	13.114,49	66.532,75	79.647,25
30	665,33	1.588,36	9.504,68	2.253,69	9.504,68	11.526,14	57.028,08	68.554,21
31	570,28	1.683,41	9.504,68	2.253,69	9.504,68	9.842,73	47.523,40	57.366,13
32	475,23	1.778,45	9.504,68	2.253,69	9.504,68	8.064,28	38.018,72	46.082,99
33	380,19	1.873,50	9.504,68	2.253,69	9.504,68	6.190,78	28.514,04	34.704,82
34	285,14	1.968,55	9.504,68	2.253,69	9.504,68	4.222,23	19.009,36	23.231,59
35	190,09	2.063,59	9.504,68	2.253,69	9.504,68	2.158,64	9.504,68	11.663,32
36	95,05	2.158,64	9.504,68	2.253,69	9.504,68	0,00	0,00	0,00

Quadro 1: Evolução do Financiamento com Ponto Focal na Época 0

4.2 O Caso da Data Focal Como a Época n

Para este caso iremos utilizar a equação (19), acoplada com as relações (10) e (17), para determinar os correspondentes valores de P e do fator de ponderação. Isto é, determinaremos os valores P e de f que tornam válidas a equação de equivalência financeira.

Observando que, para este caso de data focal como a de pagamento da última prestação, temos

soluções analíticas para os correspondentes valores de P e de f , como apresentado em Forger (2009), iremos proceder, por ter caráter geral, com a mesma metodologia computacional que foi utilizada na seção anterior.

Uma das possíveis maneiras de se determinar estes valores é mostrada nas Figuras 5, 6, 7 e 8, onde são apresentadas a planilha utilizada e as fórmulas introduzidas em cada célula. Partimos de um valor para $f = 0$.

	A	B	C	D	E	F
1	SPC - JS		F=	0,0000000000	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01	Montante em n	489.600,00
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	423000,00
4	0					
5	1	10000	0	10000	1,35	13500
6	2	10000	0	10000	1,34	13400
7	3	10000	0	10000	1,33	13300
8	4	10000	0	10000	1,32	13200
9	5	10000	0	10000	1,31	13100
10	6	10000	0	10000	1,3	13000
11	7	10000	0	10000	1,29	12900
12	8	10000	0	10000	1,28	12800
13	9	10000	0	10000	1,27	12700
14	10	10000	0	10000	1,26	12600

Figura 5: Parte da Planilha Inicial – SPC – JS – Ponto Focal Época *n*

	A	B	C	D	E	F
1	SPC - JS		F= 0		n= 36	
2	Capital	360000	taxa	0,01	Montante em n	=B2*(1+D2*F1)
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	=SOMA(F5:F40)
4	0					
5	1	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B5+C5	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A5))$	=D5*E5
6	2	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B6+C6	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A6))$	=D6*E6
7	3	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B7+C7	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A7))$	=D7*E7
8	4	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B8+C8	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A8))$	=D8*E8
9	5	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B9+C9	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A9))$	=D9*E9
10	6	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B10+C10	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A10))$	=D10*E10
11	7	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B11+C11	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A11))$	=D11*E11
12	8	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B12+C12	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A12))$	=D12*E12
13	9	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B13+C13	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A13))$	=D13*E13
14	10	= $\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(\$B\$2*\$D\$1*\$D\$2/2*(\$F\$1+1)/\$F\$1)$	= $\$B\$2*\$D\$1/\$F\1	=B14+C14	= $(1+\$D\$2*(\$F\$1-A14))$	=D14*E14

Figura 6: Parte das Fórmulas da Planilha Inicial – SPC – JS – Ponto Focal Época *n*

Similarmente ao caso anterior, vale ressaltar que as células de B5 até B40 representam os valores constantes das 36 prestações não capitalizáveis. Enquanto as células de C5 até C40 os respectivos valores das prestações capitalizáveis.

Prosseguindo, tal como na seção anterior, também fazemos uso da função atingir meta do Excel ©. A Figura 7 mostra a janela do atingir meta utilizada para determinar a solução desejada. A Figura 8 representa a solução para o problema.

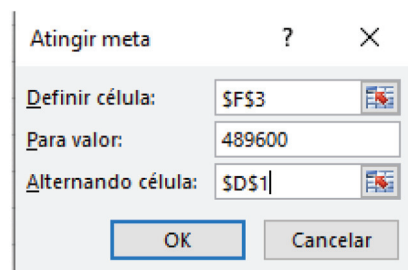


Figura 7: Janela de Parâmetros da Função Attingir Meta

	A	B	C	D	E	F
1	SPC - JS		F=	0,8510638298	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01	Montante em n	489.600,00
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	489600,00
4	0					
5	1	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,35	15625,53191
6	2	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,34	15509,78723
7	3	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,33	15394,04255
8	4	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,32	15278,29787
9	5	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,31	15162,55319
10	6	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,3	15046,80851
11	7	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,29	14931,06383
12	8	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,28	14815,31915
13	9	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,27	14699,57447
14	10	3063,829787	8510,638298	11574,46809	1,26	14583,82979

Figura 8: Parte da Solução do Valor de Ponderação – SPC – JS – Ponto Focal Período n

Uma vez determinados os valores de P , e de suas parcelas P^C e P^N , podemos apresentar a evolução do financiamento. O que é feito no Quadro 2.

SPC-JS		fator Pond. =0,85106383			Taxa a.p.=1%		nº períodos=36	
Época	Juros	ANC	ACAP	PNC	PCAP	SNC	SCAP	Saldo Final
0						53.617,02	306.382,98	360.000,00
1	3.063,83	0,00	8.510,64	3.063,83	8.510,64	53.617,02	297.872,34	351.489,36
2	2.978,72	85,11	8.510,64	3.063,83	8.510,64	53.531,91	289.361,70	342.893,62
3	2.893,62	170,21	8.510,64	3.063,83	8.510,64	53.361,70	280.851,06	334.212,77
4	2.808,51	255,32	8.510,64	3.063,83	8.510,64	53.106,38	272.340,43	325.446,81
5	2.723,40	340,43	8.510,64	3.063,83	8.510,64	52.765,96	263.829,79	316.595,74
6	2.638,30	425,53	8.510,64	3.063,83	8.510,64	52.340,43	255.319,15	307.659,57
7	2.553,19	510,64	8.510,64	3.063,83	8.510,64	51.829,79	246.808,51	298.638,30
8	2.468,09	595,74	8.510,64	3.063,83	8.510,64	51.234,04	238.297,87	289.531,91
:	:	:	:	:	:	:	:	:
29	680,85	2.382,98	8.510,64	3.063,83	8.510,64	19.063,83	59.574,47	78.638,30
30	595,74	2.468,09	8.510,64	3.063,83	8.510,64	16.595,74	51.063,83	67.659,57
31	510,64	2.553,19	8.510,64	3.063,83	8.510,64	14.042,55	42.553,19	56.595,74
32	425,53	2.638,30	8.510,64	3.063,83	8.510,64	11.404,26	34.042,55	45.446,81
33	340,43	2.723,40	8.510,64	3.063,83	8.510,64	8.680,85	25.531,91	34.212,77
34	255,32	2.808,51	8.510,64	3.063,83	8.510,64	5.872,34	17.021,28	22.893,62
35	170,21	2.893,62	8.510,64	3.063,83	8.510,64	2.978,72	8.510,64	11.489,36
36	85,11	2.978,72	8.510,64	3.063,83	8.510,64	0,00	0,00	0,00

Quadro 2: Evolução do Financiamento com Ponto Focal no Período n

5. O CASO DO SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES (SAC)

Neste sistema de amortização, tem-se que, independentemente da época k , $P^C = P_k^C = A^C = A^N = A_k^N$.

Sendo estabelecido que:

$$A^N = \frac{C \times (1 - f)}{n} \quad (20)$$

Logo, tendo em vista a relação (15), tem-se:

$$P_k^N = A_k^N + J_k$$

ou

$$P_k^N = \frac{C \times (1 - f)}{n} + C \times f \times i \times \left[\frac{n - (k - 1)}{n} \right] \quad (21)$$

Com o saldo devedor não-capitalizável sendo:

$$S_k^N = C \times (1 - f) - k \times A^N \quad (22)$$

Quanto à escolha da data focal, iremos também considerar as mesmas já analisadas na seção precedente.

5.1 O Caso da Data Focal na Época Zero

Fazendo uso do mesmo exemplo já apresentado, o primeiro passo consiste no emprego da seguinte relação, que é uma versão generalizada da relação (18):

$$C = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{1 + i \times k} \quad (23)$$

Procedendo, tal como nas seções anteriores, como ilustrado nas figuras 9,10,11 e 12, podemos determinar a correspondente evolução do financiamento.

	A	B	C	D	E	F
1	SAC-JS		F=	0,0000000000	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01		
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	306165,00
4	0					
5	1	10000	0	10000	0,99009901	9900,990099
6	2	10000	0	10000	0,980392157	9803,921569
7	3	10000	0	10000	0,970873786	9708,737864
8	4	10000	0	10000	0,961538462	9615,384615
9	5	10000	0	10000	0,952380952	9523,809524
10	6	10000	0	10000	0,943396226	9433,962264
11	7	10000	0	10000	0,934579439	9345,794393
12	8	10000	0	10000	0,925925926	9259,259259
13	9	10000	0	10000	0,917431193	9174,311927
14	10	10000	0	10000	0,909090909	9090,909091

Figura 9: Planilha Inicial – SAC – JS – Ponto Focal – Época 0

	A	B	C	D	E	F
1	SAC-JS		F= 0		n= 36	
2	Capital	360000	taxa	0,01		
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	=SOMA(F5:F40)
4	0					
5	1	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A5+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B5+C5	=1/(1+\$D\$2*A5)	=D5*E5
6	2	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A6+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B6+C6	=1/(1+\$D\$2*A6)	=D6*E6
7	3	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A7+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B7+C7	=1/(1+\$D\$2*A7)	=D7*E7
8	4	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A8+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B8+C8	=1/(1+\$D\$2*A8)	=D8*E8
9	5	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A9+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B9+C9	=1/(1+\$D\$2*A9)	=D9*E9
10	6	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A10+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B10+C10	=1/(1+\$D\$2*A10)	=D10*E10
11	7	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A11+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B11+C11	=1/(1+\$D\$2*A11)	=D11*E11
12	8	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A12+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B12+C12	=1/(1+\$D\$2*A12)	=D12*E12
13	9	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A13+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B13+C13	=1/(1+\$D\$2*A13)	=D13*E13
14	10	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A14+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B14+C14	=1/(1+\$D\$2*A14)	=D14*E14

Figura 10: Fórmulas da Planilha Inicial – SAC – JS – Ponto Focal Época 0

Prosseguindo, tal como na seção anterior, também fazemos uso da função atingir meta do Excel ©. A Figura 11 mostra a janela do atingir meta utilizada para determinar a solução desejada. A Figura 12 representa a solução para o problema.

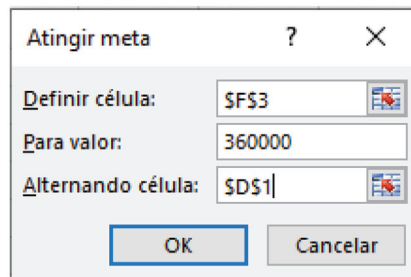


Figura 11: Janela de Parâmetros da Função Atingir Meta

	A	B	C	D	E	F
1	SAC-JS		F=	0,9056111245	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01		
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	360000,00
4	0					
5	1	4204,0888	9056,111245	13260,20005	0,99009901	13128,91094
6	2	4113,5277	9056,111245	13169,63894	0,980392157	12911,41072
7	3	4022,9666	9056,111245	13079,07782	0,970873786	12698,13381
8	4	3932,4055	9056,111245	12988,51671	0,961538462	12488,95838
9	5	3841,8444	9056,111245	12897,9556	0,952380952	12283,76724
10	6	3751,2832	9056,111245	12807,39449	0,943396226	12082,44763
11	7	3660,7221	9056,111245	12716,83337	0,934579439	11884,891
12	8	3570,161	9056,111245	12626,27226	0,925925926	11690,99283
13	9	3479,5999	9056,111245	12535,71115	0,917431193	11500,65243
14	10	3389,0388	9056,111245	12445,15004	0,909090909	11313,77276

Figura 12: Solução do Valor de Ponderação – SAC – JS – Ponto Focal Época 0

Uma vez determinados os valores de P , e de suas parcelas P^C e P^N , podemos apresentar a

evolução do financiamento. O que é sumariado no Quadro 3.

SAC-JS		fator Pond.= 0,9056111244706			Taxa a.p.=1%		nº períodos= 36	
Período	Juros	ANC	ACAP	PNC	PCAP	SNC	SCAP	Saldo Final
0						33.980,00	326.020,00	360.000,00
1	3.260,20	943,89	9.056,11	4.204,09	9.056,11	33.036,11	316.963,89	350.000,00
2	3.169,64	943,89	9.056,11	4.113,53	9.056,11	32.092,22	307.907,78	340.000,00
3	3.079,08	943,89	9.056,11	4.022,97	9.056,11	31.148,33	298.851,67	330.000,00
4	2.988,52	943,89	9.056,11	3.932,41	9.056,11	30.204,44	289.795,56	320.000,00
5	2.897,96	943,89	9.056,11	3.841,84	9.056,11	29.260,55	280.739,45	310.000,00
6	2.807,39	943,89	9.056,11	3.751,28	9.056,11	28.316,66	271.683,34	300.000,00
7	2.716,83	943,89	9.056,11	3.660,72	9.056,11	27.372,77	262.627,23	290.000,00
8	2.626,27	943,89	9.056,11	3.570,16	9.056,11	26.428,89	253.571,11	280.000,00
:	:	:	:	:	:	:	:	:
29	724,49	943,89	9.056,11	1.668,38	9.056,11	6.607,22	63.392,78	70.000,00
30	633,93	943,89	9.056,11	1.577,82	9.056,11	5.663,33	54.336,67	60.000,00
31	543,37	943,89	9.056,11	1.487,26	9.056,11	4.719,44	45.280,56	50.000,00
32	452,81	943,89	9.056,11	1.396,69	9.056,11	3.775,56	36.224,44	40.000,00
33	362,24	943,89	9.056,11	1.306,13	9.056,11	2.831,67	27.168,33	30.000,00
34	271,68	943,89	9.056,11	1.215,57	9.056,11	1.887,78	18.112,22	20.000,00
35	181,12	943,89	9.056,11	1.125,01	9.056,11	943,89	9.056,11	10.000,00
36	90,56	943,89	9.056,11	1.034,45	9.056,11	0,00	0,00	0,00

Quadro 3: Evolução do Financiamento com Ponto Focal na Época 0

5.2 O Caso da Data Focal na Época n

Notando que, também neste caso, temos soluções analíticas para o fator de ponderação f , e da sequência de prestações, o que foi apresentado por Forger (2009), iremos considerar a mesma metodologia já anteriormente apresentada.

Fazendo uso, uma vez mais, do exemplo numérico anteriormente apresentado, o primeiro passo consiste no emprego da seguinte relação, que é uma versão generalizada da relação (19):

$$C(1+i \times n) = \sum_{k=1}^n P_k \times \{1+i \times (n-k)\} \quad (24)$$

Procedendo, tal como nas seções anteriores, como ilustrado nas figuras 13,14,15 e 16, temos a correspondente evolução do financiamento. O que é sumariado no Quadro 4.

	A	B	C	D	E	F
1	SAC-JS		F=	0,0000000000	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01	Montante	489.600,00
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	423000,00
4	0					
5	1	10000	0	10000	1,35	13500
6	2	10000	0	10000	1,34	13400
7	3	10000	0	10000	1,33	13300
8	4	10000	0	10000	1,32	13200
9	5	10000	0	10000	1,31	13100
10	6	10000	0	10000	1,3	13000
11	7	10000	0	10000	1,29	12900
12	8	10000	0	10000	1,28	12800
13	9	10000	0	10000	1,27	12700
14	10	10000	0	10000	1,26	12600

Figura 13: Parte da Planilha Inicial – SAC –JS – Ponto Focal Época n

	A	B	C	D	E	F
1	SAC-JS		F=	0	n=	36
2	Capital	360000	taxa	0,01	Montante	=B2*(1+D2*F1)
3	Época	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	=SOMA(F5:F40)
4	0					
5	1	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A5+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B5+C5	=(1+\$D\$2*(F\$1-A5))	=D5*E5
6	2	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A6+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B6+C6	=(1+\$D\$2*(F\$1-A6))	=D6*E6
7	3	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A7+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B7+C7	=(1+\$D\$2*(F\$1-A7))	=D7*E7
8	4	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A8+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B8+C8	=(1+\$D\$2*(F\$1-A8))	=D8*E8
9	5	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A9+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B9+C9	=(1+\$D\$2*(F\$1-A9))	=D9*E9
10	6	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A10+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B10+C10	=(1+\$D\$2*(F\$1-A10))	=D10*E10
11	7	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A11+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B11+C11	=(1+\$D\$2*(F\$1-A11))	=D11*E11
12	8	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A12+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B12+C12	=(1+\$D\$2*(F\$1-A12))	=D12*E12
13	9	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A13+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B13+C13	=(1+\$D\$2*(F\$1-A13))	=D13*E13
14	10	=B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1+(B\$2*\$D\$1*\$D\$2*(F\$1-A14+1)/\$F\$1)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=B14+C14	=(1+\$D\$2*(F\$1-A14))	=D14*E14

Figura 14: Parte das Fórmulas da Planilha Inicial – SAC –JS – Ponto Focal Época n

Atingir meta ? X

Definir célula:

Para valor:

Alternando célula:

Figura 15: Janela de Parâmetros da Função Atingir Meta

	A	B	C	D	E	F
1	SAC-JS		F=	0,8108108108	n=	36
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01	Montante	489.600,00
3	Período	PNC(eq.14)	PC(eq.4)	Ptot	Multiplicador	489600
4	0					
5	1	4810,81081	8108,108108	12918,91892	1,35	17440,54054
6	2	4729,72973	8108,108108	12837,83784	1,34	17202,7027
7	3	4648,64865	8108,108108	12756,75676	1,33	16966,48649
8	4	4567,56757	8108,108108	12675,67568	1,32	16731,89189
9	5	4486,48649	8108,108108	12594,59459	1,31	16498,91892
10	6	4405,40541	8108,108108	12513,51351	1,3	16267,56757
11	7	4324,32432	8108,108108	12432,43243	1,29	16037,83784
12	8	4243,24324	8108,108108	12351,35135	1,28	15809,72973
13	9	4162,16216	8108,108108	12270,27027	1,27	15583,24324
14	10	4081,08108	8108,108108	12189,18919	1,26	15358,37838

Figura 16: Solução do Valor de Ponderação – SAC –JS – Ponto Focal Época n

SAC-JS		fator Pond.= 0,81081081081			Taxa a.p.=1%		nº períodos= 36	
Período	Juros	ANC	ACAP	PNC	PCAP	SNC	SCAP	Saldo Final
0						68.108,11	291.891,89	360.000,00
1	2.918,92	1.891,89	8.108,11	4.810,81	8.108,11	66.216,22	283.783,78	350.000,00
2	2.837,84	1.891,89	8.108,11	4.729,73	8.108,11	64.324,32	275.675,68	340.000,00
3	2.756,76	1.891,89	8.108,11	4.648,65	8.108,11	62.432,43	267.567,57	330.000,00
4	2.675,68	1.891,89	8.108,11	4.567,57	8.108,11	60.540,54	259.459,46	320.000,00
5	2.594,59	1.891,89	8.108,11	4.486,49	8.108,11	58.648,65	251.351,35	310.000,00
6	2.513,51	1.891,89	8.108,11	4.405,41	8.108,11	56.756,76	243.243,24	300.000,00
7	2.432,43	1.891,89	8.108,11	4.324,32	8.108,11	54.864,86	235.135,14	290.000,00
8	2.351,35	1.891,89	8.108,11	4.243,24	8.108,11	52.972,97	227.027,03	280.000,00
:	:	:	:	:	:	:	:	:
31	486,49	1.891,89	8.108,11	2.378,38	8.108,11	9.459,46	40.540,54	50.000,00
32	405,41	1.891,89	8.108,11	2.297,30	8.108,11	7.567,57	32.432,43	40.000,00
33	324,32	1.891,89	8.108,11	2.216,22	8.108,11	5.675,68	24.324,32	30.000,00
34	243,24	1.891,89	8.108,11	2.135,14	8.108,11	3.783,78	16.216,22	20.000,00
35	162,16	1.891,89	8.108,11	2.054,05	8.108,11	1.891,89	8.108,11	10.000,00
36	81,08	1.891,89	8.108,11	1.972,97	8.108,11	0,00	0,00	0,00

Quadro 4: Evolução do Financiamento com Ponto Focal na Época n

6. SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CRESCENTE – JUROS SIMPLES – SACRE-JS

No SACRE, divide-se o prazo total do financiamento de n períodos, com ℓ subperíodos iguais; cada um dos quais com m períodos. Onde n , ℓ e m são números inteiros positivos e mantém-se a relação ; como sugerido em Forger (2010).

As épocas k apresentadas nas equações (9) e (10), são números inteiros positivos, tais que $1 \leq k \leq n$. Devendo ser decompostas em termos de p ($1 \leq p \leq \ell$), índice do subperíodo em que a parcela k se encontra e q ($1 \leq q \leq m$), índice da parcela k dentro do subperíodo p . Isto é, a parcela k pode ser expressa pela seguinte relação:

$$k = (p - 1) \times m + q \tag{28}$$

Utilizando estes novos índices as equações (9) e (10) podem ser respectivamente representadas por:

$$C = \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{q=1}^m \frac{P_{(p-1) \times m + q}}{\{1 + i \times [(p - 1) \times m + q]\}} \tag{29}$$

$$C(1 + i \times \ell \times m) = \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{q=1}^m P_{(p-1) \times m + q} \times \left\{ 1 + i \times [\ell \times m - ((p - 1) \times m + q)] \right\} \tag{30}$$

Podemos dizer que, devido a forma de definição do SACRE, a prestação total em cada subperíodo deve ser constante. Como a prestação capitalizável é constante durante todo o período do financiamento, podemos afirmar que a prestação não capitalizável deve ser constante em cada subperíodo. Ou seja:

$$P_k^N = P_1^{N'} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, m$$

$$P_k^N = P_2^{N'} \quad \text{para } k = m + 1, m + 2, \dots, 2m$$

:

$$P_k^N = P_{\ell}^{N'} \quad \text{para } k = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n$$

ou

$$P_{(p-1) \times m + q}^N = P_p^{N'} \tag{31}$$

Podemos ainda dizer que o somatório das amortizações não capitalizáveis de um subperíodo

são constantes no SACRE. Isto é, independem do subperíodo.

$$\sum_{k=1}^m A_k^N = \sum_{k=m+1}^{2 \times m} A_k^N = \dots = \sum_{k=n-m+1}^n A_k^N = A^{N'} \quad (32)$$

Então para o final do p -ésimo subperíodo

$$S_{p \times m}^N = S_0^N - p \times A^{N'} \quad (33)$$

e, dado as condições iniciais e finais dos saldos devedores, temos que:

$$A^{N'} = \frac{C \times (1-f)}{\ell} \quad (34)$$

A equação de juros pode ser reescrita em função dos novos índices, como:

$$J_{(p-1) \times m + q} = i \times \frac{C \times f}{n} \times [(\ell - p + 1) \times m - (q - 1)] \quad (35)$$

e as equações das prestações, amortizações e saldo devedor não capitalizáveis por:

$$P_p^M = \left[\frac{C \times (1-f)}{n} \right]_1 + i \times \frac{C \times f}{n} \times \left[(\ell - p + 1) \times m - \frac{(m-1)}{2} \right]_1 \quad (36)$$

$$A_{(p-1) \times m + q}^N = \left[\frac{C \times (1-f)}{n} \right]_1 + i \times \frac{C \times f}{n} \times \left[(q-1) - \frac{(m-1)}{2} \right]_1 \quad (37)$$

$$S_{(p-1) \times m + q}^N = \frac{C \times (1-f)}{n} \times [n - (p-1) \times m - q] + \left(i \times \frac{C \times f}{n} \right) \times \left[\frac{q \times (m-q)}{2} \right]_1 \quad (38)$$

Até este ponto nada dependeu do ponto focal escolhido para a equivalência das equações (17) e (18). Isto é, o único parâmetro que se altera com o ponto focal, é o fator de ponderação f .

Vamos estudar o mesmo exemplo de financiamento, em todos os sistemas de amortização, com intuito de compará-los ao final do trabalho.

6.1 O Caso da Data Focal na Época 0

Fazendo uso do mesmo procedimento já anteriormente apresentado, o que é descrito por meio das figuras 17, 18, 19 e 20, segue-se que a correspondente evolução do financiamento é sumariada no Quadro 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	SACRE - JS		F=	0,0000000000	n=	36	ℓ=	3,00
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01			m=	12,00
3	Época	IndSub	Periodo Sub	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	306164,9981319
4	0							
5	1	1	1	10000	0	10000	0,99009901	9900,990099
6	2	1	2	10000	0	10000	0,980392157	9803,921569
7	3	1	3	10000	0	10000	0,970873786	9708,737864
8	4	1	4	10000	0	10000	0,961538462	9615,384615
9	5	1	5	10000	0	10000	0,952380952	9523,809524
10	6	1	6	10000	0	10000	0,943396226	9433,962264
11	7	1	7	10000	0	10000	0,934579439	9345,794393
12	8	1	8	10000	0	10000	0,925925926	9259,259259
13	9	1	9	10000	0	10000	0,917431193	9174,311927
14	10	1	10	10000	0	10000	0,909090909	9090,909091

Figura 17: Parte da Planilha Inicial – SACRE –JS – Ponto Focal Época 0

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	SACRE - JS		F=	0	n=	=H1*H2	ℓ=	3
2	Capital	360000	taxa	0,01			m=	12
3	Época	IndSub	Periodo Sub	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	=SOMA(H5:H40)
4	0							
5	1	1	1	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B5+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D5+E5	=1/(1+\$D\$2*A5)	=F5*G5
6	2	1	2	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B6+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D6+E6	=1/(1+\$D\$2*A6)	=F6*G6
7	3	1	3	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B7+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D7+E7	=1/(1+\$D\$2*A7)	=F7*G7
8	4	1	4	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B8+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D8+E8	=1/(1+\$D\$2*A8)	=F8*G8
9	5	1	5	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B9+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D9+E9	=1/(1+\$D\$2*A9)	=F9*G9
10	6	1	6	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B10+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D10+E10	=1/(1+\$D\$2*A10)	=F10*G10
11	7	1	7	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B11+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D11+E11	=1/(1+\$D\$2*A11)	=F11*G11
12	8	1	8	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B12+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D12+E12	=1/(1+\$D\$2*A12)	=F12*G12
13	9	1	9	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B13+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D13+E13	=1/(1+\$D\$2*A13)	=F13*G13
14	10	1	10	=(B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*((H\$1-B14+1)*H\$2-(H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1	=D14+E14	=1/(1+\$D\$2*A14)	=F14*G14

Figura 18: Parte das Fórmulas da Planilha Inicial – SACRE –JS – Ponto Focal Época 0

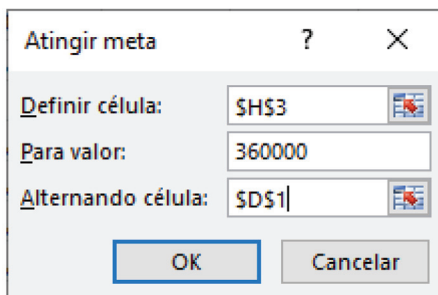


Figura 19: Janela de Parâmetros da Função Atingir Meta

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	SACRE - JS		F=	0,9103950684	n=	36	ℓ=	3,00
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01			m=	12,00
3	Época	IndSub	Período Sub	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	360000,0000000
4	0							
5	1	1	1	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,99009901	12650,20293
6	2	1	2	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,980392157	12526,18133
7	3	1	3	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,970873786	12404,56792
8	4	1	4	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,961538462	12285,29323
9	5	1	5	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,952380952	12168,29044
10	6	1	6	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,943396226	12053,49524
11	7	1	7	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,934579439	11940,84576
12	8	1	8	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,925925926	11830,28237
13	9	1	9	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,917431193	11721,74767
14	10	1	10	3672,754275	9103,950684	12776,70496	0,909090909	11615,18633

Figura 20: Solução do Valor de Ponderação – SACRE –JS – Ponto Focal n=0

SACRE–JS		fator Pond.= 0,91039506840253			Taxa a.p.=1%		nº períodos=36	
Época	Juros	ANC	ACAP	PNC	PCAP	SNC	SCAP	Saldo Final
0						32.257,78	327.742,22	360.000,00
1	3.277,42	395,33	9.103,95	3.672,75	9.103,95	31.862,44	318.638,27	350.500,72
2	3.186,38	486,37	9.103,95	3.672,75	9.103,95	31.376,07	309.534,32	340.910,40
3	3.095,34	577,41	9.103,95	3.672,75	9.103,95	30.798,66	300.430,37	331.229,03
4	3.004,30	668,45	9.103,95	3.672,75	9.103,95	30.130,21	291.326,42	321.456,63
5	2.913,26	759,49	9.103,95	3.672,75	9.103,95	29.370,72	282.222,47	311.593,19
6	2.822,22	850,53	9.103,95	3.672,75	9.103,95	28.520,19	273.118,52	301.638,71
7	2.731,19	941,57	9.103,95	3.672,75	9.103,95	27.578,62	264.014,57	291.593,19
8	2.640,15	1.032,61	9.103,95	3.672,75	9.103,95	26.546,01	254.910,62	281.456,63
:	:	:	:	:	:	:	:	:
27	910,40	577,41	9.103,95	1.487,81	9.103,95	9.293,48	81.935,56	91.229,03
28	819,36	668,45	9.103,95	1.487,81	9.103,95	8.625,03	72.831,61	81.456,63

29	728,32	759,49	9.103,95	1.487,81	9.103,95	7.865,54	63.727,65	71.593,19
30	637,28	850,53	9.103,95	1.487,81	9.103,95	7.015,01	54.623,70	61.638,71
31	546,24	941,57	9.103,95	1.487,81	9.103,95	6.073,44	45.519,75	51.593,19
32	455,20	1.032,61	9.103,95	1.487,81	9.103,95	5.040,83	36.415,80	41.456,63
33	364,16	1.123,65	9.103,95	1.487,81	9.103,95	3.917,18	27.311,85	31.229,03
34	273,12	1.214,69	9.103,95	1.487,81	9.103,95	2.702,49	18.207,90	20.910,40
35	182,08	1.305,73	9.103,95	1.487,81	9.103,95	1.396,77	9.103,95	10.500,72
36	91,04	1.396,77	9.103,95	1.487,81	9.103,95	0,00	0,00	0,00

Quadro 5: Evolução do Financiamento com Ponto Focal no Período 0

6.2 O Caso da Data Focal na Época n

Para este caso, utilizaremos a versão generalizada da equação (19) para determinar o fator de ponderação. Uma vez mais, fazendo uso do

mesmo procedimento, com emprego de planilhas do Excel, tal como apresentado nas figuras 22,23,24 e 25, segue-se que a correspondente evolução do financiamento pode ser sumariada no Quadro 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	SACRE - JS		F=	0,0000000000	n=	36	ℓ=	3,00
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01	Capital final	489.600,00	m=	12,00
3	Época	IndSub	Periodo Sub	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	423000,0000
4	0							
5	1	1	1	10000	0	10000	1,35	13500
6	2	1	2	10000	0	10000	1,34	13400
7	3	1	3	10000	0	10000	1,33	13300
8	4	1	4	10000	0	10000	1,32	13200
9	5	1	5	10000	0	10000	1,31	13100
10	6	1	6	10000	0	10000	1,3	13000
11	7	1	7	10000	0	10000	1,29	12900
12	8	1	8	10000	0	10000	1,28	12800
13	9	1	9	10000	0	10000	1,27	12700
14	10	1	10	10000	0	10000	1,26	12600

Figura 21: Parte da Planilha Inicial – SACRE –JS – Ponto Focal Época n

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	SACRE - JS		F=	0	n=	=H1*H2	ℓ=	3
2	Capital	360000	taxa	0,01	Capital final	=B2*(1+D2*F1)	m=	12
3	Época	IndSub	Periodo Sub	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	=SOMA(H5:H40)
4	0							
5	1	1	1	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D5+E5	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C5))))	=F5*G5	
6	2	1	2	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D6+E6	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C6))))	=F6*G6	
7	3	1	3	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D7+E7	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C7))))	=F7*G7	
8	4	1	4	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D8+E8	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C8))))	=F8*G8	
9	5	1	5	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D9+E9	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C9))))	=F9*G9	
10	6	1	6	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D10+E10	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C10))))	=F10*G10	
11	7	1	7	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D11+E11	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C11))))	=F11*G11	
12	8	1	8	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D12+E12	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C12))))	=F12*G12	
13	9	1	9	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D13+E13	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C13))))	=F13*G13	
14	10	1	10	=(\$B\$2*(1-\$D\$1)/\$F\$1)+(\$D\$2*\$B\$2*\$D\$1/\$F\$1)*(((\$H\$1-\$B\$1+1)*\$H\$2-(\$H\$2-1)/2)	=B\$2*\$D\$1/\$F\$1-D14+E14	=((1+\$D\$2*((\$F\$1-(((\$B\$1-1)*\$H\$2)+C14))))	=F14*G14	

Figura 22: Parte das Fórmulas da Planilha Inicial – SACRE –JS – Ponto Focal Época n

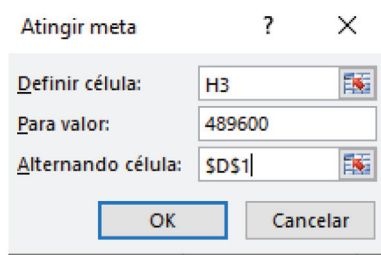


Figura 23: Janela de Parâmetros da Função Atingir Meta

A Figura 24 representa a solução para o problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	SACRE - JS		F=	0,8150677387	n=	36	ℓ=	3,00
2	Capital	360.000,00	taxa	0,01	Capital final	489.600,00	m=	12,00
3	Período	IndSub	Periodo Sub	PNC	PC	Ptot	Multiplicador	489600
4	0							
5	1	1	1	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,35	16856,04141
6	2	1	2	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,34	16731,18185
7	3	1	3	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,33	16606,32228
8	4	1	4	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,32	16481,46272
9	5	1	5	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,31	16356,60315
10	6	1	6	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,3	16231,74358
11	7	1	7	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,29	16106,88402
12	8	1	8	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,28	15982,02445
13	9	1	9	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,27	15857,16489
14	10	1	10	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,26	15732,30532
15	11	1	11	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,25	15607,44575
16	12	1	12	4335,279216	8150,677387	12485,9566	1,24	15482,58619
17	13	2	1	3357,197929	8150,677387	11507,87532	1,23	14154,68664
18	14	2	2	3357,197929	8150,677387	11507,87532	1,22	14039,60789
19	15	2	3	3357,197929	8150,677387	11507,87532	1,21	13924,52913
20	16	2	4	3357,197929	8150,677387	11507,87532	1,2	13809,45038
21	17	2	5	3357,197929	8150,677387	11507,87532	1,19	13694,37163

Figura 24: Solução do Valor de Ponderação – SACRE –JS – Ponto Focal Período n

SAC-JS		fator Pond. = 0,8150677387			Taxa a.p.=1%		nº períodos= 36	
Época	Juros	ANC	ACAP	PNC	PCAP	SNC	SCAP	Saldo Final
0						66.575,61	293.424,39	360.000,00
1	2.934,24	1.401,04	8.150,68	4.335,28	8.150,68	65.174,58	285.273,71	350.448,29
2	2.852,74	1.482,54	8.150,68	4.335,28	8.150,68	63.692,04	277.123,03	340.815,07
3	2.771,23	1.564,05	8.150,68	4.335,28	8.150,68	62.127,99	268.972,35	331.100,34
4	2.689,72	1.645,56	8.150,68	4.335,28	8.150,68	60.482,43	260.821,68	321.304,11
5	2.608,22	1.727,06	8.150,68	4.335,28	8.150,68	58.755,37	252.671,00	311.426,37

6	2.526,71	1.808,57	8.150,68	4.335,28	8.150,68	56.946,80	244.520,32	301.467,12
7	2.445,20	1.890,08	8.150,68	4.335,28	8.150,68	55.056,72	236.369,64	291.426,37
8	2.363,70	1.971,58	8.150,68	4.335,28	8.150,68	53.085,14	228.218,97	281.304,11
9	2.282,19	2.053,09	8.150,68	4.335,28	8.150,68	51.032,05	220.068,29	271.100,34
10	2.200,68	2.134,60	8.150,68	4.335,28	8.150,68	48.897,46	211.917,61	260.815,07
11	2.119,18	2.216,10	8.150,68	4.335,28	8.150,68	46.681,35	203.766,93	250.448,29
12	2.037,67	2.297,61	8.150,68	4.335,28	8.150,68	44.383,74	195.616,26	240.000,00
:	:	:	:	:	:	:	:	:
25	978,08	1.401,04	8.150,68	2.379,12	8.150,68	20.790,84	89.657,45	110.448,29
26	896,57	1.482,54	8.150,68	2.379,12	8.150,68	19.308,29	81.506,77	100.815,07
27	815,07	1.564,05	8.150,68	2.379,12	8.150,68	17.744,24	73.356,10	91.100,34
28	733,56	1.645,56	8.150,68	2.379,12	8.150,68	16.098,69	65.205,42	81.304,11
29	652,05	1.727,06	8.150,68	2.379,12	8.150,68	14.371,63	57.054,74	71.426,37
30	570,55	1.808,57	8.150,68	2.379,12	8.150,68	12.563,06	48.904,06	61.467,12
31	489,04	1.890,08	8.150,68	2.379,12	8.150,68	10.672,98	40.753,39	51.426,37
32	407,53	1.971,58	8.150,68	2.379,12	8.150,68	8.701,40	32.602,71	41.304,11
33	326,03	2.053,09	8.150,68	2.379,12	8.150,68	6.648,31	24.452,03	31.100,34
34	244,52	2.134,60	8.150,68	2.379,12	8.150,68	4.513,71	16.301,35	20.815,07
35	163,01	2.216,10	8.150,68	2.379,12	8.150,68	2.297,61	8.150,68	10.448,29
36	81,51	2.297,61	8.150,68	2.379,12	8.150,68	0,00	0,00	0,00

Quadro 6: Evolução do Financiamento com Ponto Focal no Período *n*

3.4 Comparação Entre os Diversos Modelos

Tendo em vista que, como discutido em de Faro e Lachtermacher (2022) e em Lachtermacher e de Faro (2022), todos os modelos se apresentaram consistentes financeiramente, a comparação dos

casos aqui considerados pode nos dar uma visão, do ponto de vista do mutuário, da melhor opção entre os métodos considerados.

A Figura 25 mostra a comparação entre os sistemas de amortização em cada um dos pontos focais considerados.

Capitalização Juros Simples	Sistema SAC		Sistema SPC		Sistema SACRE	
	Início Período	Final Período	Início Período	Final Período	Início Período	Final Período
Juros	R\$ 60.313,70	R\$ 54.000,00	R\$ 63.301,16	R\$ 56.680,85	R\$ 60.632,31	R\$ 54.283,51
Amortização Não Capitalizável	R\$ 33.980,00	R\$ 68.108,11	R\$ 17.831,55	R\$ 53.617,02	R\$ 32.257,78	R\$ 66.575,61
Amortização Capitalizável	R\$ 326.020,00	R\$ 291.891,89	R\$ 342.168,45	R\$ 306.382,98	R\$ 327.742,22	R\$ 293.424,39
Amortização Total	R\$ 360.000,00	R\$ 360.000,00	R\$ 360.000,00	R\$ 360.000,00	R\$ 360.000,00	R\$ 360.000,00
Prestação Não Capitalizável	R\$ 94.293,70	R\$ 122.108,11	R\$ 81.132,71	R\$ 110.297,87	R\$ 92.890,09	R\$ 120.859,13
Prestação Capitalizável	R\$ 326.020,00	R\$ 291.891,89	R\$ 342.168,45	R\$ 306.382,98	R\$ 327.742,22	R\$ 293.424,39
Prestação Total	R\$ 420.313,70	R\$ 414.000,00	R\$ 423.301,16	R\$ 416.680,85	R\$ 420.632,31	R\$ 414.283,51
Prestação Inicial	R\$ 13.260,20	R\$ 12.918,92	R\$ 11.758,37	R\$ 11.574,47	R\$ 12.776,70	R\$ 12.485,96

Figura 25: Comparação entre os Sistemas de Amortização

Nos três sistemas, os juros totais e prestações totais, com pontos focais no final do financiamento, são menores do que os respectivos valores com pontos focais no início do período. Corroborando, assim, os estudos anteriormente apresentados em de Faro e Lachtermacher (2022) e Lachtermacher e de Faro (2022, a e b).

Nos três sistemas as prestações iniciais são menores com as opções do ponto focal ao final do financiamento. Logo esta, também, deveria ser escolhida pelo mutuário, uma vez que demandaria uma menor renda para a contratação do financiamento.

Como era de esperar, a melhor opção na escolha do particular sistema de amortização recai sobre o sistema SAC. Seguido pelo sistema SACRE e, por último, pelo sistema SPC. Já que os juros totais e prestações totais decaem nesta ordem.

4. METODOLOGIA

Como uma metodologia geral a ser aplicada para a implementação de sistemas de amortização de financiamento com capitalização com juros simples, deve-se utilizar o critério linear de apropriação, que separa o capital financiado, amortizações e prestações, em duas partes. Com base em um fator de apropriação. O que garante a equivalência de capitais e a não cobrança de juros sobre juros, uma vez que os juros do período são somados à respectiva prestação não capitalizável do mesmo período.

Logo, a seguinte metodologia deve ser seguida:

1. Definir o sistema de amortização a ser utilizado.
2. Definir o Ponto Focal a ser utilizado.
3. Estabelecer a equação de equivalência de capitais a ser utilizada.
4. Selecionar as equações de prestações capitalizáveis e não capitalizáveis em função do sistema de amortização a ser utilizado.
5. Montar a planilha para determinação do fator de ponderação com base no sistema de amortização, ponto focal, prazo do financiamento (e subperíodos no caso do SACRE) e taxa de juros ao período.

6. Determinar os valores das prestações capitalizáveis e não capitalizáveis, além do fator de ponderação que garantem a equivalência de capitais.

7. Montar, por fim, o Plano Total de financiamento.

Esta metodologia foi utilizada na resolução dos casos estudados neste trabalho.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi realizada uma comparação entre os sistemas de amortização mais usuais, no caso da eventual adoção do regime de juros simples. Isto, com o intuito de ilustrar possíveis utilizações futuras, tendo em vista diversas decisões judiciais que continuam sendo proferidas.

Nesta comparação, verificou-se que, sob o ponto de vista do mutuário, o Sistema de Amortizações Constantes – SAC, com ponto focal no final do período, deve ser o preferido. Seguido pelo Sistema de Amortizações Crescentes – SACRE e, finalmente, pelo Sistema de Prestações Constantes.

Estabeleceu-se uma metodologia geral a ser seguida, em cada caso, para se estabelecer o correspondente Plano de Amortização do Financiamento.

6. REFERÊNCIAS

- AYRES, Frank. **Mathematics of finance**. New York: McGraw-Hill, 1963.
- BUTCHER, Marjorie V; NESBITT, Cecil James. **Mathematics of Compound Interest**, Universidade de Michigan: Ulrich, 1971.
- DE LOSSO, Rodrigo; SANTOS, José Carlos de Souza; CAVALCANTE FILHO, Elias. "As Inconsistências do Método de Gauss-Nogueira", **Informações FIPE**, São Paulo, nº 472, jan. 2020, p. 8-21.
- DREZZA, Eduardo Roberto Massa. **A Conformação da Legalidade da Capitalização Composta de Juros na Tabela Price**. 2021. Dissertação (mestrado em direito)- Escola de Direito de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, 2021.

FARO, Clovis de. Sistemas de Amortização: O Conceito de Consistência Financeira e Suas Implicações. **Revista de Economia e Administração**, v. 13, n. 3, p. 376-391, mar. 2014. Disponível em: <https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/10438/11547/Sistemas-de-Amortizacao-o-Conceito-de-Consistencia-Financeira-e-Suas-Implicacoes.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 05 dez. 2022.

FARO, Clovis de. Financial Implications of the Gauss method, *Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade*, v. 6, n. 2, p. 179-188, 2016.- de Faro, C. & Guerra, S., "Proibição da Capitalização de Juros e o Poder Judiciário: Equívocos na Aplicação de Teorias Econômicas". **Revista de Direito Administrativo**, v. 266, maio/ago. 2014, p. 209-228.

FARO, Clovis de; LACHTERMACHER, Gerson., "Sistema de Prestações Constantes no Regime de Juros Simples: Duas Versões Financeiramente Consistentes", **Ensaio Econômico da EPGE**, nº 831, F.G.V., outubro de 2022.

FINETT, Bruno de. **Leçons de Mathématiques Financières**, Paris: Dunod, 1969.

FORGUER, Frank Michael. Saldo Capitalizável e Saldo Não Capitalizável: Novos Algoritmos para o Regime de Juros Simples, **USP, RT-MAP-0905**, outubro/2009.

_____. Algoritmos para o Sistema de Amortização Crescente (SACRE), **USP, RT-MAP-1001**, abril/2010.

HUMMELL, Paul; SEEBECK, Charles. **Mathematics of Finance**, 2ª Ed., McGraw-Hill, 1956.

KELLISON, Stephen. **The Theory of Interest**, 2ª Ed., Irwin, 1991.

KOSIOL, Erich. **Finanzmathematik**. Gabler, 1973.

MCCUTCHEON, John; SCOTT, William. F. **An Introduction to the Mathematics of Finance**, Butterworth-Heinemann, 1986.

LACHTERMACHER, Gerson; FARO, Clovis de. **Sistema de Amortizações em Juros Simples: Um novo Olhar**, em elaboração, 2022.