O SACRE NO REGIME DE JUROS COMPOSTOS

PROF. DR. CLOVIS DE FARO[1]
PROF. DR. GERSON LACHTERMACHER[2]

RESUMO

Até recentemente, no âmbito da CEF, o mutuário tinha a opção de contratar um financiamento imobiliário através do sistema de amortização crescente (SACRE). Correntemente (junho de 2022), por determinação judicial, este sistema não mais se encontra como uma das opções para os mutuários da CEF. Contudo, um grande número de contratos utilizando este sistema ainda se encontram em vigor. Como o SACRE não é um sistema financeiramente consistente, tal como analisado em de Faro (2014), nosso propósito aqui é o de apresentar uma variante que, mantendo a característica básica de representar uma verdadeira simbiose entre o SAC e a TP, não padeça desta deficiência. Variante esta, denominada SACRE*, que além de corrigir a inconsistência apresentada pelo sistema original pode facilmente ser utilizada na maioria dos contratos vigentes.

Palavras-chave: sistemas de amortização; empréstimos imobiliários; inconsistência financeira.

ABSTRACT

Until recently, under the CEF, the borrower had the option of contracting real estate financing through the increasing amortization system (SACRE). Currently (June 2022), by court order, this system is no longer one of the options for CEF borrowers. However, a large number of contracts using this system are still in force. SACRE is not a financially consistent system, as analyzed in de Faro (2014). Our purpose here is to present a variant that, while maintaining the basic characteristic of representing a true symbiosis between SAC and TP, does not suffer from this deficiency. This variant will be called SACRE*, which, in addition to correcting the inconsistency presented by the original system, can easily be used in most current contracts.

Keywords: amortization systems; real estate loans; financial inconsistency.

1 Ph.D. em Engenharia Industrial, Universidade de Stanford, Pós-Doutorado pela Universitat Müchen, U.M, Alemanha em Engenharia Econômica e Pesquisa Operacional (1981). Contato: clovis.faro@fgv.br

2 Doutor em Management Sciences - University of Waterloo (1993). Foi diretor de Gestão Acadêmica do IDE da Fundação Getúlio Vargas e professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro e Universidade Federal do Rio de Janeiro. Tem experiência na área de Administração, atuando principalmente nos seguintes áreas: Finanças, Redes Neurais, Mineração de Dados e Pesquisa Operacional. Contato: glachter@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Desde sua criação, em 1964, o Sistema Financeiro de Habitação (SFH), inicialmente sob a gestão do Banco Nacional de Habitação (BNH) e, posteriormente, em 1986, com o gerenciamento da Caixa Econômica Federal (CEF), tem sido pródigo em apresentar uma sucessão de diferentes sistemas de amortização de empréstimos habitacionais.

Tendo introduzido o instituto do princípio do que se denominou de correção monetária, de acordo com a Lei nº 4.380, de agosto de 1964, foi inicialmente adotado o sistema de prestações constantes; também conhecido como Tabela Price (TP) ou Sistema de Prestação Constante com Capitalização de Juros Composta (SPC-JC).

Na oportunidade, foram estabelecidos os chamados Plano A e Plano B. Enquanto no Plano B os saldos devedores e as prestações eram monetariamente atualizados, simultaneamente, de acordo com o índice da variação do valor nominal das então chamadas Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN's), no Plano A tínhamos distintas sistemáticas. Mantendo-se a atualização monetária trimestral dos saldos devedores, o valor das prestações era monetariamente atualizado anualmente, segundo a variação do salário mínimo. Com isto, como pioneiramente apontado por Rio Nogueira (1968), gerou-se um procedimento financeiramente inconsistente. Podendo, inclusive, acarretar uma possível eternização do débito.

Tal inconsistência financeira levou o BNH a constituir, em 1967, o que se denominou de Fundo de Compensação de Variações Salariais (FCVS). Que tinha a finalidade de absorver os débitos residuais gerados no Plano A.

Mais tarde, em 1969, também com fulcro no sistema de prestações constantes, criou-se o polêmico Plano de Equivalência Salarial (PES). Plano este que, com base no que se denominou de coeficiente de equiparação salarial, cujo conceito é criticamente analisado em de Faro (1992), buscava compatibilizar as distintas sistemáticas de correção monetária trimestral de saldos devedores e de correção monetária anual das prestações. Sendo que, eventuais débitos residuais, também eram absorvidos pelo FCVS. O que, como informado, em 27 de maio de 2019, pela Associação Brasileira de Entidades de Crédito Imobiliário e Poupança (ABECIP), já havia acumulado um passivo de quase R$ 300 bilhões; que seria coberto pelo Tesouro Nacional.

Subsequentemente, como também analisado em de Faro (1992), adotou-se, em 1971, o sistema dito de amortizações constantes (SAC). Que tem como consequência o fato de que as prestações decresçam segundo uma progressão aritmética, e que o saldo devedor decresça linearmente.

A seguir, em 1979, criou-se o que se denominou de Sistema de Amortização Mista (SAM). Que pode ser interpretado como se metade do valor do financiamento fosse segundo o sistema de prestações constantes; com a segunda metade como se fosse segundo o SAC.

Sendo que, em 1984, criou-se o exótico Sistema Misto de Amortização com Prestações Reais Crescentes (SIMC), que também é analisado em de Faro (1992).

Mais recentemente, no âmbito da CEF, passou-se a ser utilizado o que se denominou de sistema de amortização crescente (SACRE). Sendo que, correntemente (junho de 2022), provavelmente a partir de decisão proferida pelo Tribunal Regional Federal da 3ª Região de São Paulo, proferida em 2010, o SACRE não mais se encontra como uma das opções para os mutuários da CEF,[3]

Tendo em vista que, como ainda hoje se constata em sítios na internet (tais como, Dr Calc, blog.loft.com, soedil.com e youtube.com/watch), o SACRE não é um sistema financeiramente consistente, tal como analisado em de Faro (2014), nosso propósito aqui é o de apresentar uma variante que, mantendo a característica básica de representar uma verdadeira simbiose entre o SAC e a TP, não padeça desta deficiência. Variante esta que será denominada SACRE*.

Subsidiariamente, levando em conta a possibilidade de que as taxas de juros ultrapassem certos valores críticos, é também evidenciada uma outra deficiência básica do SACRE; tal como originalmente proposto.

Por fim, visto que, como já mencionado, o SACRE pode ser interpretado como uma mistura do SAC com a TP, é também apresentada uma comparação com o SAM.

3 Não obstante, a resolução Nº 4676 de 31 de julho de 2018, do Banco Central do Brasil, ainda menciona o SACRE.

2. O SACRE NA SUA VERSÃO CORRENTE

Tal como se constata nos sítios da internet já mencionados, o SACRE afigura-se como um sistema de amortização de débitos que pode ser interpretado como uma mescla do sistema de prestações constantes (TP) com o sistema de amortizações constantes (SAC).

Genericamente, considerando o caso de um financiamento de F unidades de capital, com prazo de $\boldsymbol{n}$ períodos, subdivididos em $\boldsymbol{\ell}$ subperíodos de $\boldsymbol{m}$ períodos (com $\boldsymbol{\ell}$ sendo um número inteiro), à taxa periódica i de juros compostos, é estabelecido que:

a) ao longo dos $\boldsymbol{m}$ primeiros períodos, a prestação tenha o valor constante $\boldsymbol{p_1}$, igual à primeira parcela de juros, $J_1 = i \times F$, acrescida da primeira parcela de amortização, $A_1 = F/n$. Ou seja, tal como no SAC, cf. (de Faro & Lachtermacher, 2012), tem-se que a primeira prestação é $p_1 = F \times (n \times i + 1)/n$. Porém, agora, esse valor é mantido constante em cada um dos $\boldsymbol{m} - \mathbf{1}$ períodos subsequentes. Assim, tem-se:

$$p_k = F \times (n \times i + 1)/n \quad \text{, para } k = 1, 2, \ldots, m \qquad (1)$$

b) para a determinação do saldo devedor na época k, denotado por $\boldsymbol{S_k}$, faz-se uso da relação recursiva, dita recorrência fundamental, c.f. de Faro e Lachtermacher (2012).

$$S_k = (1+i) S_{k-1} - p_k \text{ , válida para } k = 1, 2, \ldots, n \text{ , com } S_0 = F \qquad (2)$$

c) ao final dos $\boldsymbol{m}$ primeiros períodos, tome-se $A_{m+1} = S_m / (n-m)$ como a parcela de amortização associada à prestação p_{m+1} ; com a correspondente parcela de juros sendo $J_{m+1} = i \times S_m$ Portanto, $p_{m+1} = S_m \times [i \times (n-m) + 1]/(n-m)$. Com este valor sendo mantido constante ao longo do segundo subperíodo; ou seja:

$$p_k = S_m \times [i \times (n-m) + 1]/(n-m) \text{, para } k = m+1, m+2, \ldots, 2m \qquad (3)$$

d) repetindo-se, recursivamente, o mesmo procedimento, tem-se que a parcela de amortização associada à prestação $p_{(\ell-1)m+1}$ será $A_{(\ell-1)m+1} = S_{(\ell-1)m} / \{n - [m \times (\ell - 1)]\}$, com a correspondente parcela de juros sendo $J_{(\ell-1)m+1} = i \times S_{(\ell-1)m}$. Com as últimas $\boldsymbol{m}$ prestações sendo mantidas constantes e iguais a:

$$p_k = S_{(\ell-1)m} \{i \times [n - (\ell - 1) \times m] + 1\} / [n + (\ell - 1) \times m] \qquad (4)$$

para $k = [(\ell-1) \times m + 1], [(\ell-1) \times m + 2], \ldots, [(\ell-1) \times m + m] = m \times \ell = n$

A título de ilustração, considere-se o caso onde $\boldsymbol{n} = 12$, $\boldsymbol{m} = 3$ (ou seja, $\ell = 4$) e o financiamento de 12.000 unidades de capital e i = 1% a.p. .

No Quadro 1 é sumariada a evolução do correspondente do estado da dívida.

Taxa a.p.= 1,00%		Períodos= 12		Subperíodo=3
Período (k)	Juros	Amortização	Prestação	Saldo
0				12.000,00
1	120,00	1.000,00	1.120,00	11.000,00
2	110,00	1.010,00	1.120,00	9.990,00
3	99,90	1.020,10	1.120,00	8.969,90
4	89,70	996,66	1.086,35	7.973,24
5	79,73	1.006,62	1.086,35	6.966,62
6	69,67	1.016,69	1.086,35	5.949,93
7	59,50	991,66	1.051,16	4.958,28
8	49,58	1.001,57	1.051,16	3.956,71
9	39,57	1.011,59	1.051,16	2.945,12
10	29,45	981,71	1.011,16	1.963,41
11	19,63	991,52	1.011,16	971,89
12	9,72	1.001,44	1.011,16	-29,55
Somatório	776,45	12.029,55	12.806,00	---

Quadro 1: Evolução do Estado da Dívida na Versão Corrente

Como se depreende do apresentado no Quadro 1, o SACRE, na sua versão original, não é financeiramente consistente. Posto que o saldo devedor no final do prazo contratual não é zerado. Ao contrário, o mutuário que contrate seu financiamento pelo SACRE, é geralmente obrigado a pagar mais do que é efetivamente devido. Passando, pois, ao fim do prazo contratual, de devedor a credor.

Neste ponto, deve-se chamar a atenção para uma distinta alternativa, sugerida por Forger (2010), que é financeiramente consistente. Sendo que sua característica básica é a de que, a cada um dos $\boldsymbol{m}$ subperíodos, o valor da prestação decresça segundo uma progressão aritmética. Todavia, deve ser observado que esta versão deixa de considerar uma característica básica do SAC. Posto que, a cada um do $\boldsymbol{m}$ subperíodos, o valor inicial da correspondente parcela de amortização, não mais é dado pelo quociente do saldo devedor imediatamente anterior e o número de períodos remanescentes.

Como consequência tem-se que a prestação inicial proposta por Forger (2010), é sempre inferior à que se obtém quando é empregada a versão original do SACRE. O Quadro 2 mostra o caso do exemplo anterior segundo as fórmulas apresentadas por Forger (2010).

Sacre JC - FORGER				
Taxa=1% a.p.			nº Períodos= 12	
Período	Juros	Amortização	Prestação	Saldo
0				12.000,00
1	120,00	990,07	1.110,07	11.009,93
2	110,10	999,97	1.110,07	10.009,97
3	100,10	1.009,97	1.110,07	9.000,00
4	90,00	990,07	1.080,07	8.009,93
5	80,10	999,97	1.080,07	7.009,97
6	70,10	1.009,97	1.080,07	6.000,00
7	60,00	990,07	1.050,07	5.009,93
8	50,10	999,97	1.050,07	4.009,97
9	40,10	1.009,97	1.050,07	3.000,00
10	30,00	990,07	1.020,07	2.009,93
11	20,10	999,97	1.020,07	1.009,97
12	10,10	1.009,97	1.020,07	0,00
Somatório	780,80	12.000,00	12.780,80	-

Quadro 2: Evolução do Estado da Dívida na Versão Forger (2010)

Entretanto, deve ser observado que Forger (2010) também apresenta uma versão para o caso de adoção do regime de juros simples. Versão esta que se fundamenta no impropriamente denominado método de Gauss, tal como proposto em Nogueira (2013) e Rovina (2009).

Porém, com fulcro no discutido em de Faro (2016), e em Delosso et al. (2020), pode-se concluir que tal versão de juros simples é, ela mesma, financeiramente inconsistente. Tal como é discutido em de Faro e Lachtermacher (2022).

3. UMA SEGUNDA INCONSISTÊNCIA

Ademais da inconsistência financeira analisada na seção anterior, cabe ainda destacar uma segunda deficiência do que se denominou de sistema de amortização crescente (SACRE).

Sendo que, cumpre ressaltar, embora esta segunda inconsistência não esteja presente no caso dos atuais valores das taxas de juros que vêm sendo praticadas, ela identifica uma gritante falha teórica do SACRE.

Também a título da ilustração, considere-se o caso de um financiamento de 12.000 unidades de capital, n=12, m = 3 (ou seja, ℓ = 4) e a taxa de juros do financiamento é ao período. No Quadro 3, apresenta-se a correspondente evolução do estado da dívida.

Taxa Mensal= 80,00%		Períodos=12		
Período	Juros	Amortização	Prestação	Saldo
0				12.000,00
1	9.600,00	1.000,00	10.600,00	11.000,00
2	8.800,00	1.800,00	10.600,00	9.200,00
3	7.360,00	3.240,00	10.600,00	5.960,00
4	4.768,00	662,22	5.430,22	5.297,78
5	4.238,22	1.192,00	5.430,22	4.105,78
6	3.284,62	2.145,60	5.430,22	1.960,18
7	1.568,14	326,70	1.894,84	1.633,48
8	1.306,79	588,05	1.894,84	1.045,43
9	836,34	1.058,50	1.894,84	-13,07
10	-10,45	-4,36	-14,81	-8,71
11	-6,97	-7,84	-14,81	-0,87
12	-0,70	-14,11	-14,81	13,24
Somatório	41.743,99	11.986,76	53.730,75	-

Quadro 3: Evolução do Estado da Dívida se i = 80% a.p.

Do apresentado no Quadro 3, constata-se que, logo após o pagamento da 9ª prestação, no valor de 1.894,84 unidades de capital, o saldo devedor afigura-se como negativo. Vale ressaltar que, como a prestação do último subperíodo é negativa, o que, obviamente, é um contrassenso, o saldo volta a ficar positivo no final do 12º período.

O Gráfico 1 mostra a evolução do saldo devedor de um financiamento 12.000 unidades de capital, n=12, m = 3 (ou seja, ℓ = 4) a diversas taxas de juros do financiamento (i = 10%, 30%, 50%, 70% e 90% a.p).

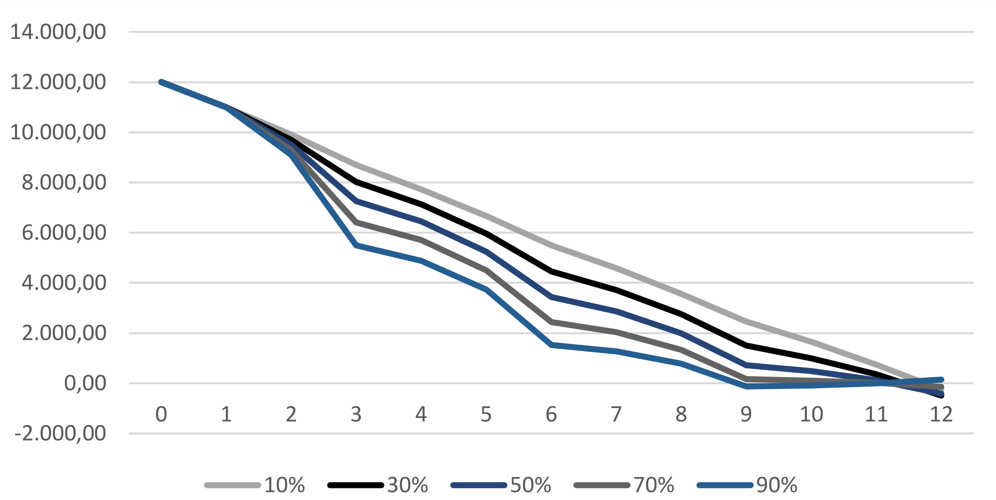

Gráfico 1: Evolução do Saldo Devedor X Taxa de Juros

Pode-se concluir que o saldo devedor não decresce de forma linear. Ademais, o saldo devedor pode-se mostrar, positivo ou negativo, ao final do prazo do financiamento.

Lembrando que, antes da promulgação do Chamado Plano Real, de 1994, era comum taxas nominais de juros ainda maiores do que 80% a.p, é insofismável que o SACRE é um método de amortização com insanáveis deficiências teóricas.

O Gráfico 2, que diz respeito ao caso de um financiamento de R$ 200.000,00, prazo de financiamento de 10 anos, com repactuação das prestações mensais a cada 12 meses (m=12), o que implica em que se tenha dez subperíodos (ℓ =10), apresenta o total amortizado no financiamento em função da taxa mensal de juros i = 1, 2, ... , 30% a.p.

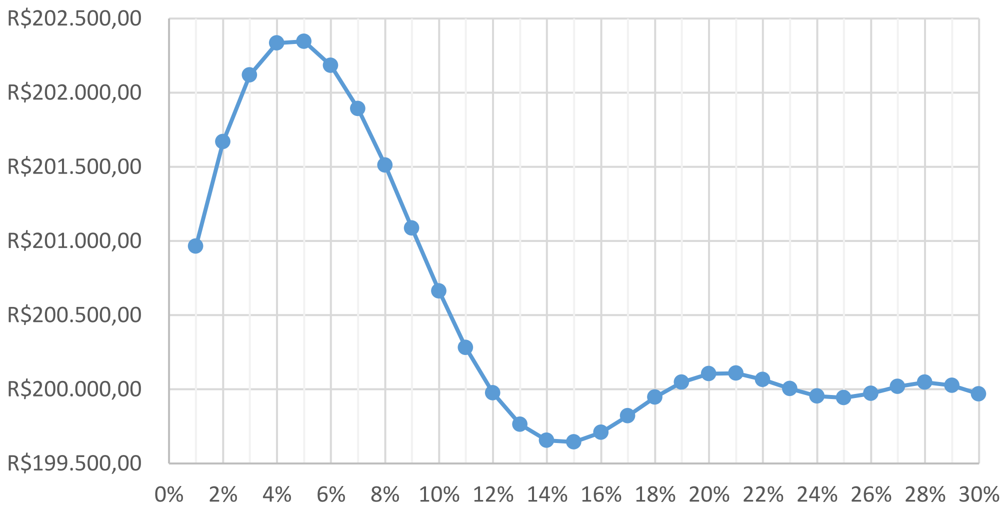

Gráfico 2: Total Amortizado X Taxa de Juros

Assim, por exemplo, quando i = 1% ao mês, o total pago a título de amortização durante o período de financiamento foi de R$ 200,965,96. Isto é, o saldo devedor no final dos 10 anos, é negativo e igual a R$965,96. Ou seja, o mutuário passaria a ser credor.

Como se verifica, o total pago a título de amortização, cresce até que a taxa mensal de juros i seja igual a 5% ao mês. No entanto, decresce a partir deste ponto. Sendo que, quando i=12% ao mês, o total amortizado é praticamente igual ao saldo do financiamento. Isto é, o saldo final já estaria praticamente zerado.

No entanto, para i superior a 12% ao mês, o total amortizado volta a ficar superior ao valor financiado. Isto é, o saldo devedor final fica negativo. Pelo menos até à taxa i ser igual a 17% ao mês.

A partir deste ponto, temos um comportamento algo errático. Com o total amortizado flutuando ao redor do valor do financiamento (R$ 200.000,00).

Pode-se, pois, inferir que mesmo para o caso de taxas de juros não muito elevadas, podemos, dependendo do prazo do financiamento, ter casos onde o SACRE, tal como originalmente proposto, é intrinsicamente inconsistente.

4. UMA VERSÃO FINANCEIRAMENTE CONSISTENTE – SACRE*

Focando a atenção na situação ora vigente, onde as taxas de juros que são cobradas não costumam superar 20% ao ano, vejamos como determinar uma versão financeiramente consistente; que possa ser utilizada na maioria dos contratos ora existentes. Versão esta que denominaremos de SACRE*. Vale ressaltar que a solução apresentada por Forger (2010) não serve para este propósito; visto que ela altera o valor inicial da prestação.

Como visto na seção precedente, relação (1), aqui repetida como relação (5), tem-se que as primeiras $\boldsymbol{m}$ prestações, $\boldsymbol{p_k}$, tem o valor constante, $\boldsymbol{P_1}$, onde $\boldsymbol{F = S_0}$, dado pela relação:

$$p_1 = A_1 + J_1 = \frac{S_0}{n} + i \times S_0 = S_0 \times \left(\frac{1}{n} + i\right) = \frac{S_0}{n} \times (1 + n \times i) \quad (5)$$

Ou seja:

$$P_1 = p_1 = p_k \text{ , para } k = 1, 2, \ldots, 12$$

Portanto, lançando mão do chamado método de recorrência para a determinação do saldo devedor S_m , tal como apresentado no Apêndice A, tem-se que:

$$S_m = S_0 \times (1+i)^m - \left\{P_1 \times \left[(1+i)^m - 1\right] / i\right\} \quad (6)$$

Relação esta que, tendo em vista o valor de $\boldsymbol{P_1}$ apresentado na Equação 5 (Apêndice B), pode ser rescrita como:

$$S_m = \frac{S_0}{n} \times \left\{n - \left[(1+i)^m - 1\right] / i\right\} \quad (7)$$

Para o segundo subperíodo de prestações constantes, iguais a $\boldsymbol{P_2}$, isto é, para as épocas $\boldsymbol{k}$ iguais a $\boldsymbol{m}+1$, $\boldsymbol{m}+2$,..., $2\boldsymbol{m}$, temos:

$$A_{m+1} = S_m / (n-m) \text{ e } J_{m+1} = i \times S_m \Rightarrow p_{m+1} = A_{m+1} + J_{m+1} = S_m \times \left[\frac{1 + i \times (n-m)}{n-m}\right]$$

Ou seja:

$$P_2 = p_k = S_m \times \left[\frac{1 + i \times (n-m)}{n-m}\right] \quad \text{para} \quad k = m+1, m+2, \ldots, 2m \quad (8)$$

Fazendo novamente uso, recursivamente, do método de recorrência (Apêndice C), tem-se que:

$$S_{2m} = S_m \times (1+i)^m - P_2 \times \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right] \quad (9)$$

Do que decorre, com a substituição de $\boldsymbol{P_2}$ apresentado na Equação 8:

$$S_{2m} = \frac{S_m}{(n-m)} \times \left\{(n-m) - \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right]\right\} \quad (10)$$

Para o terceiro subperíodo de prestações constantes, iguais a $\boldsymbol{P_3}$, isto é, as épocas $2\boldsymbol{m}+1$, $2\boldsymbol{m}+2$,..., $3\boldsymbol{m}$, temos:

$$A_{2m+1} = S_{2m} / (n - 2 \times m) \text{ e } J_{2m+1} = i \times S_{2m} \Rightarrow p_{2m+1} = A_{2m+1} + J_{2m+1} = S_{2m} \times \left[\frac{1 + i \times (n - 2 \times m)}{n - 2 \times m}\right]$$

Ou seja:

$$P_3 = p_k = S_{2m} \times \left[\frac{1 + i \times (n - 2 \times m)}{n - 2 \times m}\right] \text{ , para } k = 2m+1, 2m+2, \ldots, 3m \quad (11)$$

Similarmente, ainda fazendo uso do método de recorrência, tem-se que:

$$S_{3m} = S_{2m} \times (1+i)^m - P_3 \times \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] \quad (12)$$

Do que decorre que:

$$S_{3m} = \frac{S_{2m}}{(n - 2 \times m)} \times \left\{ (n - 2 \times m) - \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] \right\} \quad (13)$$

Consequentemente, o que pode ser constatado por indução, conforme Apêndice D, após $\ell - 1$ repetições do mesmo procedimento que vem sendo aqui adotado, tem-se que:

$$S_{(\ell-1)m} = \frac{S_{(\ell-2)m}}{\left[n - (\ell-2) \times m \right]} \times \left\{ n - \left[(\ell-2) \times m \right] - \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] \right\} \quad (14)$$

Todavia, exatamente neste ponto, sugere-se que as $\boldsymbol{m}$ últimas prestações, ao invés de serem mantidas constantes, como no procedimento original, sejam determinadas segundo o sistema de amortizações constantes.

Desta maneira, como $A_{(\ell-1)m+1} = S_{(\ell-1)m} / m$ e $J_{(\ell-1)m+1} = i \times S_{(\ell-1)m}$, as $\boldsymbol{m}$ últimas prestações irão formar uma progressão aritmética decrescente (diferença entre termos constantes negativas), com termo inicial $p_{(\ell-1)m+1} = S_{(\ell-1)m} (1 + i \times m) / m$, e razão igual a $-i \times S_{(\ell-1)m} / m$. Ou seja, ter-se-á:

$$P_\ell = p_k = S_{(\ell-1)m} \left[1 - i \times (k - n - 1) \right] / m \quad , \text{para } k = (\ell-1)m+1, (\ell-1)m+2, \ldots, n \quad (15)$$

Assim, obtendo-se, pois, uma versão financeiramente consistente do SACRE, visto que o saldo devedor será efetivamente zerado com o pagamento da última prestação contratual, ter-se-á um procedimento que se afigura como também sendo de interesse para o mutuário. Pois que, nos últimos períodos, ao invés de serem constantes, as prestações passam a ser decrescentes.

No Gráfico 3, também para o caso onde $\boldsymbol{S_0}$ = R$ 200.000,00, o prazo do financiamento é 10 anos, com repactuação anual do valor das prestações ($\ell = 12$), é apresentada a evolução do saldo devedor final em função da taxa mensal i de juros compostos. Quando esta varia de 1 a 5%.

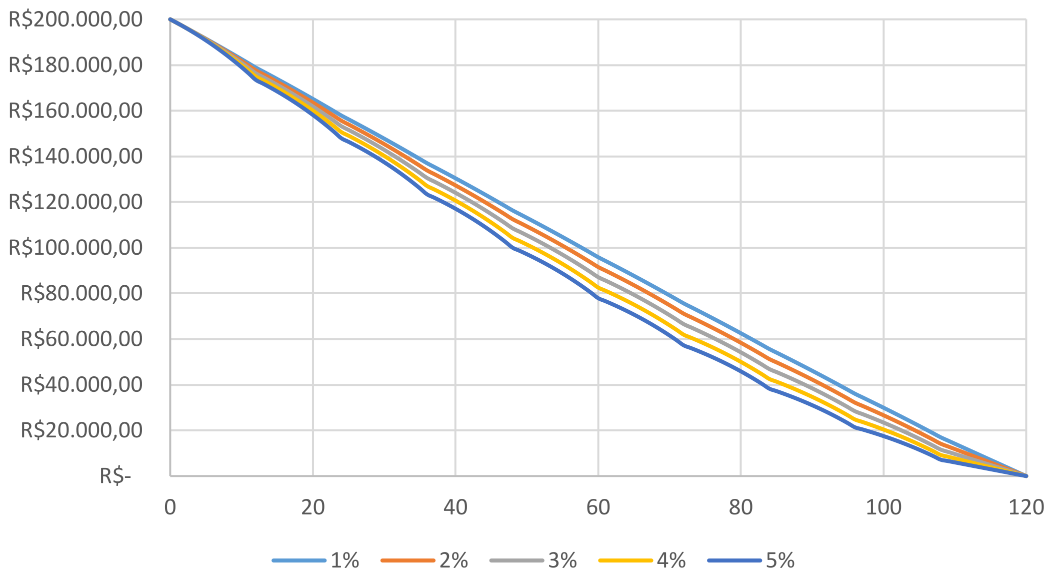

Gráfico 3: Evolução do Saldo Devedor – Diversas Taxas – Prazo 10 anos

No Gráfico 4, também para o caso onde S_0 = R$ 200.000,00, com o prazo do financiamento passando a ser de 15 anos, com repactuação anual do valor das prestações (m=12), é apresentada a evolução do saldo devedor final em função da taxa mensal i de juros compostos. Quando esta varia de 1% a 5%.

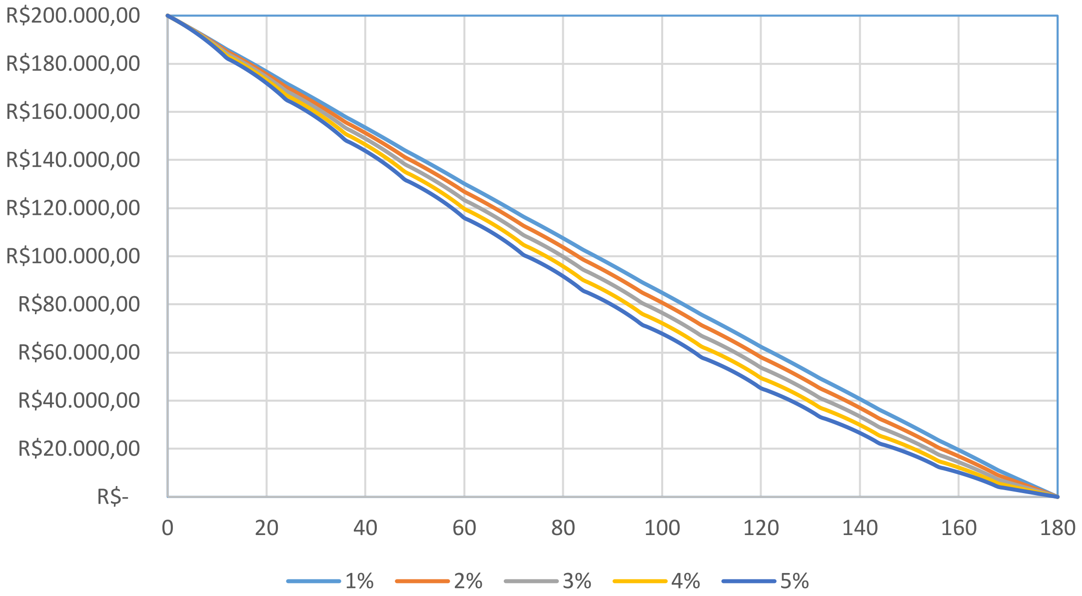

Gráfico 4: Evolução do Saldo Devedor – Diversas Taxas – Prazo 15 anos

Como evidenciado nos dois casos considerados, o saldo devedor final é efetivamente zerado.

5. UM EXEMPLO NUMÉRICO – SACRE*

Como uma ilustração numérica, considere-se o caso onde o valor do financiamento é R$ 120.000,00, com m=12, n=60 períodos, com a taxa de juros i sendo de 1% por período. No Quadro 4 é apresentada a correspondente evolução do estado da dívida.

Período	Juros	Amortização	Prestação	Saldo
0				R$ 120.000,00
1	R$ 1.200,00	R$ 2.000,00	R$ 3.200,00	R$ 118.000,00
2	R$ 1.180,00	R$ 2.020,00	R$ 3.200,00	R$ 115.980,00
3	R$ 1.159,80	R$ 2.040,20	R$ 3.200,00	R$ 113.939,80
4	R$ 1.139,40	R$ 2.060,60	R$ 3.200,00	R$ 111.879,20
5	R$ 1.118,79	R$ 2.081,21	R$ 3.200,00	R$ 109.797,99
6	R$ 1.097,98	R$ 2.102,02	R$ 3.200,00	R$ 107.695,97
7	R$ 1.076,96	R$ 2.123,04	R$ 3.200,00	R$ 105.572,93
8	R$ 1.055,73	R$ 2.144,27	R$ 3.200,00	R$ 103.428,66
9	R$ 1.034,29	R$ 2.165,71	R$ 3.200,00	R$ 101.262,95
10	R$ 1.012,63	R$ 2.187,37	R$ 3.200,00	R$ 99.075,57
11	R$ 990,76	R$ 2.209,24	R$ 3.200,00	R$ 96.866,33
12	R$ 968,66	R$ 2.231,34	R$ 3.200,00	R$ 94.634,99
13	R$ 946,35	R$ 1.971,56	R$ 2.917,91	R$ 92.663,43
14	R$ 926,63	R$ 1.991,28	R$ 2.917,91	R$ 90.672,15
15	R$ 906,72	R$ 2.011,19	R$ 2.917,91	R$ 88.660,96
16	R$ 886,61	R$ 2.031,30	R$ 2.917,91	R$ 86.629,66
17	R$ 866,30	R$ 2.051,62	R$ 2.917,91	R$ 84.578,04
18	R$ 845,78	R$ 2.072,13	R$ 2.917,91	R$ 82.505,91
19	R$ 825,06	R$ 2.092,85	R$ 2.917,91	R$ 80.413,06

20	R$	804,13	R$	2.113,78	R$	2.917,91	R$	78.299,28
21	R$	782,99	R$	2.134,92	R$	2.917,91	R$	76.164,36
22	R$	761,64	R$	2.156,27	R$	2.917,91	R$	74.008,09
23	R$	740,08	R$	2.177,83	R$	2.917,91	R$	71.830,26
24	R$	718,30	R$	2.199,61	R$	2.917,91	R$	69.630,65
25	R$	696,31	R$	1.934,18	R$	2.630,49	R$	67.696,46
26	R$	676,96	R$	1.953,53	R$	2.630,49	R$	65.742,94
27	R$	657,43	R$	1.973,06	R$	2.630,49	R$	63.769,88
28	R$	637,70	R$	1.992,79	R$	2.630,49	R$	61.777,08
29	R$	617,77	R$	2.012,72	R$	2.630,49	R$	59.764,36
30	R$	597,64	R$	2.032,85	R$	2.630,49	R$	57.731,51
31	R$	577,32	R$	2.053,18	R$	2.630,49	R$	55.678,34
32	R$	556,78	R$	2.073,71	R$	2.630,49	R$	53.604,63
33	R$	536,05	R$	2.094,44	R$	2.630,49	R$	51.510,19
34	R$	515,10	R$	2.115,39	R$	2.630,49	R$	49.394,80
35	R$	493,95	R$	2.136,54	R$	2.630,49	R$	47.258,25
36	R$	472,58	R$	2.157,91	R$	2.630,49	R$	45.100,35
37	R$	451,00	R$	1.879,18	R$	2.330,18	R$	43.221,16
38	R$	432,21	R$	1.897,97	R$	2.330,18	R$	41.323,19
39	R$	413,23	R$	1.916,95	R$	2.330,18	R$	39.406,24
40	R$	394,06	R$	1.936,12	R$	2.330,18	R$	37.470,12
41	R$	374,70	R$	1.955,48	R$	2.330,18	R$	35.514,63
42	R$	355,15	R$	1.975,04	R$	2.330,18	R$	33.539,60
43	R$	335,40	R$	1.994,79	R$	2.330,18	R$	31.544,81
44	R$	315,45	R$	2.014,74	R$	2.330,18	R$	29.530,07
45	R$	295,30	R$	2.034,88	R$	2.330,18	R$	27.495,19
46	R$	274,95	R$	2.055,23	R$	2.330,18	R$	25.439,95
47	R$	254,40	R$	2.075,78	R$	2.330,18	R$	23.364,17
48	R$	233,64	R$	2.096,54	R$	2.330,18	R$	21.267,63
49	R$	212,68	R$	1.772,30	R$	1.984,98	R$	19.495,32
50	R$	194,95	R$	1.772,30	R$	1.967,26	R$	17.723,02
51	R$	177,23	R$	1.772,30	R$	1.949,53	R$	15.950,72
52	R$	159,51	R$	1.772,30	R$	1.931,81	R$	14.178,42
53	R$	141,78	R$	1.772,30	R$	1.914,09	R$	12.406,12
54	R$	124,06	R$	1.772,30	R$	1.896,36	R$	10.633,81
55	R$	106,34	R$	1.772,30	R$	1.878,64	R$	8.861,51
56	R$	88,62	R$	1.772,30	R$	1.860,92	R$	7.089,21
57	R$	70,89	R$	1.772,30	R$	1.843,19	R$	5.316,91
58	R$	53,17	R$	1.772,30	R$	1.825,47	R$	3.544,60
59	R$	35,45	R$	1.772,30	R$	1.807,75	R$	1.772,30
60	R$	17,72	R$	1.772,30	R$	1.790,03	R$	-

Quadro 4: Evolução do Estado da Dívida no Caso do Exemplo

A evolução apresentada no Quadro 4, não só confirma, uma vez mais, a consistência financeira da versão do SACRE* aqui sugerida, como também ilustra o ganho que seria auferido pelo mutuário. Sendo que esta pode ser implementada em contratos que possam estar ainda em andamento; desde que não se esteja no último subperíodo de pagamento.

6. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS SAC, TP, SAM E SACRE*

Como aqui analisado, e já anteriormente apontado, tanto o SACRE como o SACRE* podem ser interpretados como resultantes de uma mistura do SAC com o SPC ou TP.

Ora, sucede que o chamado sistema misto de amortização (SAM), foi precipuamente estabelecido para compatibilizar as características da TP, prestações constantes, com as do SAC; onde as parcelas de amortização são todas iguais.

Parece ser, portanto, oportuno efetuar uma comparação, com base nos respectivos valores das somas das prestações, das somas dos juros e das prestações iniciais, do que acontece nos casos do SAC, da TP, do SAM e do SACRE*.

Considerando o caso de um financiamento de F unidades de capital, $\boldsymbol{F=S_0}$, pelo prazo de n períodos, à taxa periódica i (juros composto), e tendo em vista de Faro e Lachtermacher (2012), temos as seguintes expressões para as respectivas somas das prestações, $\hat{S}$:

a) Para o SAC $\quad \hat{S}^{SAC} = \dfrac{S_0}{2} \times \left[2+(n+1)\times i\right] \qquad (16)$

b) Para a TP $\quad \hat{S}^{TP} = S_0 \times n \times \left[\dfrac{i\times(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad (17)$

c) Para o SAM - Como o SAM pode ser interpretado como se metade do valor $\boldsymbol{F}$ (igual a $\boldsymbol{S_0}$) do financiamento fosse contratado pela TP, como a outra metade como se fosse contratada pelo SAC, segue-se que:

$$\hat{S}^{SAM} = \frac{\hat{S}^{SAC} + \hat{S}^{TP}}{2} = \frac{\left\{S_0 \times n\left[\dfrac{i\times(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] + S_0 \times \left[2+(n+1)\times i\right]/2\right\}}{2}$$

ou

$$\hat{S}^{SAM} = \frac{S_0}{2} \times \left\{\frac{n\times i\times(1+i)^n}{\left[(1+i)^n - 1\right]} + \frac{\left[2+(n+1)\times i\right]}{2}\right\} \qquad (18)$$

d) Para o SACRE*

Por outro lado, sendo considerado o financiamento segundo o SACRE*, como aqui sugerido e levando em conta o Apêndice E, tem-se o seguinte total para a soma das prestações:

$$\hat{S}^{SACRE*} = m \times S_0 \times \left\{ \left(\frac{1+n\times i}{n} \right) + \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{1+i\left[n-(k-1)m\right]}{n-(k-1)m} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-(j-1)m-\alpha}{n-(j-1)m} \right\} + \frac{S_{(\ell-1)m}}{2} \left\{ 2+i\times(m+1) \right\} \quad (19)$$

onde $\alpha = \left\{ (1+i)^m - 1 \right\} / i$ (20)

Para o caso, de um financiamento de R$ 120.000,00, n = 60 meses, e a taxa mensal i varia de 0,5% até 5%, e no caso, do SACRE*, prestações constantes por um ano, o Quadro 5 apresenta os valores das respectivas somas das prestações. O Quadro 6 apresenta as somas das respectivas parcelas de juros, e o Quadro 7 os valores das primeiras prestações nos diversos sistemas.

	Total de Prestações			
Taxa de Juros	SAC	TP ou SPC	SAM	SACRE*
0,5%	R$ 138.300,00	R$ 139.196,17	R$ 138.748,09	R$ 138.049,81
1,0%	R$ 156.600,00	R$ 160.160,02	R$ 158.380,01	R$ 155.593,08
1,5%	R$ 174.900,00	R$ 182.832,68	R$ 178.866,34	R$ 172.620,91
2,0%	R$ 193.200,00	R$ 207.129,35	R$ 200.164,68	R$ 189.125,00
2,5%	R$ 211.500,00	R$ 232.944,45	R$ 222.222,23	R$ 205.097,66
3,0%	R$ 229.800,00	R$ 260.157,30	R$ 244.978,65	R$ 220.531,93
3,5%	R$ 248.100,00	R$ 288.638,07	R$ 268.369,04	R$ 235.421,56
4,0%	R$ 266.400,00	R$ 318.253,28	R$ 292.326,64	R$ 249.761,16
4,5%	R$ 284.700,00	R$ 348.870,64	R$ 316.785,32	R$ 263.546,21
5,0%	R$ 303.000,00	R$ 380.362,93	R$ 341.681,46	R$ 276.773,12

Gráfico 5: Soma das Prestações

	Total de Juros			
Taxa de Juros	SAC	TP ou SPC	SAM	SACRE*
0,5%	R$ 18.300,00	R$ 19.196,17	R$ 18.748,09	R$ 18.049,81
1,0%	R$ 36.600,00	R$ 40.160,02	R$ 38.380,01	R$ 35.593,08
1,5%	R$ 54.900,00	R$ 62.832,68	R$ 58.866,34	R$ 52.620,91
2,0%	R$ 73.200,00	R$ 87.129,35	R$ 80.164,68	R$ 69.125,00
2,5%	R$ 91.500,00	R$ 112.944,45	R$ 102.222,23	R$ 85.097,66
3,0%	R$ 109.800,00	R$ 140.157,30	R$ 124.978,65	R$ 100.531,93
3,5%	R$ 128.100,00	R$ 168.638,07	R$ 148.369,04	R$ 115.421,56
4,0%	R$ 146.400,00	R$ 198.253,28	R$ 172.326,64	R$ 129.761,16
4,5%	R$ 164.700,00	R$ 228.870,64	R$ 196.785,32	R$ 143.546,21
5,0%	R$ 183.000,00	R$ 260.362,93	R$ 221.681,46	R$ 156.773,12

Gráfico 6: Soma dos Juros Pagos

	Prestação Inicial							
Taxa de Juros	SAC		TP ou SPC		SAM		SACRE*	
0,5%	R$	2.600,00	R$	2.319,94	R$	2.459,97	R$	2.600,00
1,0%	R$	3.200,00	R$	2.669,33	R$	2.934,67	R$	3.200,00
1,5%	R$	3.800,00	R$	3.047,21	R$	3.423,61	R$	3.800,00
2,0%	R$	4.400,00	R$	3.452,16	R$	3.926,08	R$	4.400,00
2,5%	R$	5.000,00	R$	3.882,41	R$	4.441,20	R$	5.000,00
3,0%	R$	5.600,00	R$	4.335,96	R$	4.967,98	R$	5.600,00
3,5%	R$	6.200,00	R$	4.810,63	R$	5.505,32	R$	6.200,00
4,0%	R$	6.800,00	R$	5.304,22	R$	6.052,11	R$	6.800,00
4,5%	R$	7.400,00	R$	5.814,51	R$	6.607,26	R$	7.400,00
5,0%	R$	8.000,00	R$	6.339,38	R$	7.169,69	R$	8.000,00

Gráfico 7: Primeira Prestação do Financiamento

Do ponto de vista do mutuário, o SACRE*, tal como proposto neste trabalho, apresenta significativas vantagens. Visto que, para todas as taxas consideradas, tem-se sempre menores valores totais para as somas das prestações e juros pagos durante o financiamento.

A única desvantagem que o SACRE* apresenta, está no fato de implicar maior valor para a prestação inicial (rigorosamente igual ao SAC). O que exigiria do mutuário uma maior renda para ter o financiamento aceito por uma instituição financeira.

7. CONCLUSÃO

Obviamente, tanto no âmbito do extinto BNH como no da CEF, o propósito das constantes alterações nos sistemas de amortizações que têm sido adotados, deve ter tido como principal motivação atender aos anseios dos mutuários de seus financiamentos habitacionais.

Todavia, no caso particular do SACRE, parece evidente que tal objetivo não foi alcançado. Não só se gerou um procedimento financeiramente inconsistente, como, assim parece, a CEF viu-se obrigada a não mais oferecer o SACRE como uma possível opção para seus mutuários.

De todo o modo, o SACRE*, como aqui proposto, passa a ser uma opção para a CEF corrigir as inconsistências dos contratos ora em curso; visto que a maioria dos contratos não se encontra no último ano de vigência e traz benefícios, em termos de prestações decrescentes no último subperíodo, para os mutuários, bem como, servir como opção para novos financiamentos.

REFERÊNCIAS

DE-LOSSO, Rodrigo; SANTOS, José Carlos de Souza; CAVALCANTE FILHO, Elias. As Inconsistências do Método Gauss-Nogueira. **Boletim Informações FIPE**, nº 472, 2020.

FARO, Clovis de. **Vinte Anos de BNH:** a evolução dos planos básicos de financiamento para aquisição da casa própria do Banco Nacional de Habitação – 1964/84. Rio de Janeiro: EDUFF/FGV, 1992.

FARO, Clovis de. Sistemas de Amortização: o Conceito de Consistência e suas Implicações, **Revista de Economia e Administração**, São Paulo. vol. 13, n. 3, 2014.

FARO, Clovis de. Financial Implications of the "Gauss Method". **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, Senhor do Bonfim/Ba, v. 6, n. 2, 2016.

FARO, Clovis de; LACHTERMACHER, Gerson. **Introdução à Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: Editora FGV/Saraiva, 2012.

FARO, Clovis de; LACHTERMACHER, Gerson. **O SACRE no Regime de Juros Simples** (em elaboração)

FORGER, Frank Michael. **Algoritmos para o Sistema de Amortização Crescente (SACRE)**. USP, RT-MAP-1001, 2010.

NOGUEIRA, José Jorge Meschiatti. **Tabela Price:** Mitos e Paradigmas, 3. ed. Campinas: Millenium, 2013.

ROGUEIRA, R. **Um estudo sobre os empréstimos do BNH**. Mensário Estatístico do INSS, 183, 1968.

ROVINA, Edson. U**ma nova visão da matemática financeira.** Campinas: Millenium, 2009.

APÊNDICE A

Dedução da Equação (6)

$$
\begin{aligned}
&S_1 = S_0 \times (1+i) - P_1\\
&S_2 = S_1 \times (1+i) - P_1 = \left[S_0 \times (1+i) - P_1\right] \times (1+i) - P_1 = S_0 \times (1+i)^2 - P_1 \times \left[(1+i)+1\right]\\
&S_3 = S_2 \times (1+i) - P_1 = \left\{S_0 \times (1+i)^2 - P_1 \times \left[(1+i)+1\right]\right\} \times (1+i) - P_1 = S_0 \times (1+i)^3 - P_1 \times \left[(1+i)^2 + (1+i) + 1\right]\\
&\vdots\\
&S_m = S_0 \times (1+i)^m - P_1 \times \left[(1+i)^{m-1} + (1+i)^{m-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i) + 1\right] = S_0 \times (1+i)^m - P_1 \times \sum_{\ell=1}^{m} (1+i)^{\ell-1}
\end{aligned}
$$

Como $\sum_{\ell=1}^{m} (1+i)^{m-\ell}$ é a soma de uma progressão geométrica finita de m termos com $a_1 = 1$, $a_n = (1+i)^{m-1}$ e razão $(1+i)$, tem-se:

$$\sum_{\ell=1}^{m} (1+i)^{\ell-1} = \frac{(1+i)^m - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^m - 1}{i}$$

Portanto:

$$S_m = S_0 \times (1+i)^m - \left\{P_1 \times \left[(1+i)^m - 1\right]/i\right\} \quad \text{c.q.d.}$$

APÊNDICE B

Dedução da Equação (7)

Evoluindo a equação (6) com a substituição de P_1

$$
\begin{aligned}
&S_m = S_0 \times (1+i)^m - \left\{\frac{S_0}{n} \times (1+n\times i) \times \left[(1+i)^m - 1\right]/i\right\}\\
&S_m = S_0 \times (1+i)^m - \frac{S_0}{n\times i} \times (1+n\times i) \times (1+i)^m + \frac{S_0}{n\times i} \times (1+n\times i)\\
&S_m = S_0 \times \left\{(1+i)^m - \frac{(1+n\times i)\times(1+i)^m}{n\times i} + \frac{(1+n\times i)}{n\times i}\right\}\\
&S_m = S_0 \times \left\{(1+i)^m - \frac{(1+n\times i)}{n\times i} \times \left[(1+i)^m - 1\right]\right\} = S_0 \times \left\{(1+i)^m - 1 - \frac{(1+n\times i)}{n\times i} \times \left[(1+i)^m - 1\right] + 1\right\}\\
&S_m = S_0 \times \left\{\left[(1+i)^m - 1\right] \times \left[1 - \frac{(1+n\times i)}{n\times i}\right] + 1\right\} = S_0 \times \left\{\left[(1+i)^m - 1\right] \times \left[\frac{n\times i - (1+n\times i)}{n\times i}\right] + 1\right\}\\
&S_m = S_0 \times \left\{\left[(1+i)^m - 1\right] \times \left[\frac{-1}{n\times i}\right] + \frac{n\times i}{n\times i}\right\} = \frac{S_0}{n\times i} \times \left\{\left[(1+i)^m - 1\right] \times \left[-1\right] + n\times i\right\}\\
&S_m = \frac{S_0}{n\times i} \times \left\{n\times i - \left[(1+i)^m - 1\right]\right\} = \frac{S_0}{n} \times \left\{n - \frac{\left[(1+i)^m - 1\right]}{i}\right\}
\end{aligned}
$$

Relação esta que pode ser reescrita como:

$$S_m = \frac{S_0}{n} \times \left\{n - \left[(1+i)^m - 1\right]/i\right\} \quad \text{c.q.d.}$$

APÊNDICE C

Dedução da Equação (9)

Fazendo uso, recursivamente, do método de recorrência, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
S_{m+1} &= S_m \times (1+i) - P_2 \\
S_{m+2} &= S_{m+1} \times (1+i) - P_2 = \left[S_m \times (1+i) - P_2 \right] \times (1+i) - P_2 = S_m \times (1+i)^2 - P_2 \times \left[(1+i) + 1 \right] \\
S_{m+3} &= S_{m+2} \times (1+i) - P_2 = \left\{ S_m \times (1+i)^2 - P_2 \times \left[(1+i) + 1 \right] \right\} \times (1+i) - P_2 = \\
&= S_m \times (1+i)^3 - P_2 \times \left[(1+i)^2 + (1+i) + 1 \right] \\
&\vdots \\
S_{2\times m} &= S_m \times (1+i)^m - P_2 \times \left[(1+i)^{m-1} + (1+i)^{m-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i) + 1 \right] \\
&= S_m \times (1+i)^m - P_2 \times \sum_{\ell=1}^{m} (1+i)^{\ell-1} = S_m \times (1+i)^m - P_2 \times \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right]
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$S_{2m} = S_m \times (1+i)^m - P_2 \times \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] \text{ c.q.d.}$$

APÊNDICE D

Demonstração de que se tenha

$$S_{(\ell-1)m} = \frac{S_{(\ell-2)m}}{\left[n - (\ell-2) \times m \right]} \times \left\{ n - \left[(\ell-2) \times m \right] - \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] \right\}$$

Procedendo por indução, suponha-se que:

$$S_{(\ell-2)m} = \frac{S_{(\ell-3)m}}{\left[n - (\ell-3) \times m \right]} \times \left\{ n - \left[(\ell-3) \times m \right] - \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] \right\}$$

Como só restam 2m períodos, tem-se que:

$$A_{(\ell-2)m+1} = \frac{S_{(\ell-2)m}}{2 \times m} \quad \text{e} \quad J_{(\ell-2)m+1} = i \times S_{(\ell-2)m}$$

Ou seja, a prestação que se vence na época $k = \left[(\ell-2) \times m \right] + 1$, e que fica constante ao longo de m períodos, $P_{\ell-1}$, é

$$P_{(\ell-1)} = A_{(\ell-2)m+1} + J_{(\ell-2)m+1} = \frac{S_{(\ell-2)m}}{2 \times m} + i \times S_{(\ell-2)m} = S_{(\ell-2)m} \times \left[\frac{1}{2 \times m} + i \right]$$

$$P_{(\ell-1)} = \frac{S_{(\ell-2)m}}{2 \times m} \times \left[(2 \times m \times i) + 1 \right]$$

Por conseguinte, fazendo-se uso do método de recorrência, segue-se que:

$$S_{(\ell-1)m}=S_{(\ell-2)m}\times(1+i)^m-P_{(\ell-1)}\times\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]$$

$$S_{(\ell-1)m}=S_{(\ell-2)m}\times(1+i)^m-\left\{\frac{S_{(\ell-2)m}}{2\times m}\times\left[(2\times m\times i)+1\right]\right\}\times\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]$$

$$S_{(\ell-1)m}=S_{(\ell-2)m}\times\left\{(1+i)^m-\left[\frac{(2\times m\times i)+1}{2\times m}\right]\times\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\right\}$$

$$S_{(\ell-1)m}=\frac{S_{(\ell-2)m}}{2\times m\times i}\times\left\{\left[2\times m\times i\times(1+i)^m\right]-\left[(2\times m\times i)+1\right]\times\left[(1+i)^m-1\right]\right\}$$

$$S_{(\ell-1)m}=\frac{S_{(\ell-2)m}}{2\times m\times i}\times\left[(2\times m\times i)-(1+i)^m+1\right]=\frac{S_{(\ell-2)m}}{2\times m}\times\left\{(2\times m)-\left[\frac{(1+i)^m+1}{ì}\right]\right\}$$

Ou, como $2\times m=n-\left[(\ell-2)\times m\right]$, tem-se que:

$$S_{(\ell-1)m}=\frac{S_{(\ell-2)m}}{\left[n-(\ell-2)\times m\right]}\times\left\{n-\left[(\ell-2)\times m\right]-\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\right\}\text{ c.q.d.}$$

APÊNDICE E

Evolução dos Saldos Devedores e das Prestações no SACRE*

Fazendo uso das relações (7), (10), (13) e (14) apresentadas no texto e aqui replicadas, e tendo presente que $S_0=F$, tem-se, recursivamente, que o saldo devedor , ao final dos três primeiros subperíodos, é:

$$S_m=\frac{S_0}{n}\times\left\{n-\frac{\left[(1+i)^m-1\right]}{i}\right\}=\frac{S_0}{n}\times(n-\alpha)\qquad(7)$$

$$S_{2m}=\frac{S_m}{(n-m)}\times\left\{(n-m)-\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\right\}=\frac{S_m}{(n-m)}\times\left\{(n-m)-\alpha\right\}\qquad(10)$$

$$S_{3m}=\frac{S_{2m}}{(n-2\times m)}\times\left\{(n-2\times m)-\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\right\}=\frac{S_{2m}}{(n-2\times m)}\times\left\{(n-2\times m)-\alpha\right\}\qquad(13)$$

$$S_{(\ell-1)m}=\frac{S_{(\ell-2)m}}{\left[n-(\ell-2)\times m\right]}\times\left\{n-\left[(\ell-2)\times m\right]-\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\right\}\qquad(14)$$

$$S_{(\ell-1)m}=\frac{S_{(\ell-2)m}}{\left[n-(\ell-2)\times m\right]}\times\left\{n-\left[(\ell-2)\times m\right]-\alpha\right\}$$

Generalizando-se, decorre que:

$$S_{(\ell-1)m}=S_0\times\left\{\prod_{j=1}^{(\ell-1)\times m}\left[\frac{n-(j-1)\times m-\alpha}{n-(j-1)\times m}\right]\right\}$$

com $\boldsymbol{\alpha}$ sendo dado pela equação (20) do texto.

Relativamente às prestações, já foi visto no texto que as $\boldsymbol{m}$ primeiras (primeiro subperíodo) são todas iguais a P_1, equação (5) aqui replicada,

$$P_1 = \frac{S_0}{n} \times (1 + n \times i) \tag{5}$$

Com as $\boldsymbol{m}$ seguintes (segundo subperíodo) iguais a P_2 , equação (8) aqui replicada, levando em conta a expressão para S_m , sendo todas iguais a

$$P_2 = S_m \times \left[\frac{1 + i \times (n - m)}{n - m}\right] = \frac{S_0}{n} \times (n - \alpha) \times \left[\frac{1 + i \times (n - m)}{n - m}\right] \tag{8}$$

Similarmente, no terceiro subperíodo, iguais a P_3 , equação (11) aqui replicada, pode ser verificado que as prestações tem o valor constante P_3, dado por:

$$P_3 = S_{2m} \times \left[\frac{1 + i \times (n - 2 \times m)}{n - 2 \times m}\right] = S_m \times \left[\frac{(n - m) - \alpha}{(n - m)}\right] \times \left[\frac{1 + i \times (n - 2 \times m)}{n - 2 \times m}\right]$$

$$P_3 = S_0 \times \left(\frac{n - \alpha}{n}\right) \times \left[\frac{(n - m) - \alpha}{(n - m)}\right] \times \left[\frac{1 + i \times (n - 2 \times m)}{n - 2 \times m}\right]$$

Generalizando-se, decorre que as m penúltimas prestações terão o valor constante $P_{\ell-1}$ dado por:

$$P_{(\ell-1)} = A_{(\ell-2)m+1} + J_{(\ell-2)m+1} = \frac{S_{(\ell-2)m}}{2 \times m} + i \times S_{(\ell-2)m} = S_{(\ell-2)m} \times \left[\frac{1}{2 \times m} + i\right]$$

$$P_{(\ell-1)} = \frac{S_{(\ell-2)m}}{2 \times m} \times \left[(2 \times m \times i) + 1\right] = S_{(\ell-2)m} \times \left\{\frac{i \times \left[n - (\ell - 2) \times m\right] + 1}{\left[n - (\ell - 2) \times m\right]}\right\}$$

Que, por substituições sucessivas nos saldos dos subperíodos anteriores, tem-se:

$$P_{(\ell-1)} = S_0 \times \left\{\frac{i \times \left[n - (\ell - 2) \times m\right] + 1}{\left[n - (\ell - 2) \times m\right]}\right\} \times \left\{\prod_{j=1}^{\ell-2} \frac{n - (j - 1)m - \alpha}{n - (j - 1)m}\right\}$$

Quanto às $\boldsymbol{m}$ últimas prestações, recorde-se que o SACRE* propõe que, ao invés de serem constantes, como nos $\ell - 1$ subperíodos anteriores, sejam decrescentes em progressão aritmética, com termo inicial $p_{(\ell-1)m+1}$ dado por:

$$p_{(\ell-1)m+1} = A_{(\ell-1)m+1} + J_{(\ell-1)m+1} = \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} + \left(S_{(\ell-1)m} \times i\right)$$

$$p_{(\ell-1)m+1} = S_{(\ell-1)m} \times \left(\frac{1}{m} + i\right)$$

$$p_{(\ell-1)m+1} = \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} \times (1 + i \times m)$$

e segundo termo dado por

$$p_{(\ell-1)m+2} = A_{(\ell-1)m+2} + J_{(\ell-1)m+2} = \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} + \left(S_{(\ell-1)m+1} \times i\right)$$

$$p_{(\ell-1)m+2} = \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} + \left[S_{(\ell-1)m} - \frac{S_{(\ell-1)m}}{m}\right] \times i$$

$$p_{(\ell-1)m+2} = \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} \times \left[1 + m \times i - i\right]$$

Logo a razão será:

$$r = p_{(\ell-1)m+2} - p_{(\ell-1)m+1}$$

$$r = \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} \times \left[1 + m \times i - i\right] - \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} \times \left(1 + i \times m\right)$$

$$r = \frac{S_{(\ell-1)m}}{m} \times \left[\left(1 + m \times i - i\right) - \left(1 + i \times m\right)\right]$$

$$r = \frac{-i \times S_{(\ell-1)m}}{m}$$

ou seja:

$$p_k = S_{(\ell-1)m} \times \left[1 + i \times \left(n - k + 1\right)\right] / m, \quad \text{para} \quad k = \left(\ell - 1\right)m + 1, \left(\ell - 1\right)m + 2, \ldots, n$$

Quanto aos m últimos saldos devedores do SACRE*, tem-se:

$$S_k = S_{(\ell-1)m}\left[\left(n - k\right)\right] / m, \quad \text{para} \quad k = \left(\ell - 1\right)m + 1, \left(\ell - 1\right)m + 2, \ldots, n$$

Por conseguinte, tendo em vista que a soma das prestações no SACRE* é

$$\hat{S}^{SACRE*} = m \times \left(\sum_{k=1}^{\ell-1} P_j\right) + \sum_{j=(\ell-1)\times m+1}^{n} p_j$$

com

$$\sum_{k=1}^{\ell-1} P_j = \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{S_0}{n} \times \left(1 + n \times i\right)\right] + \left\{\frac{S_0}{n} \times \left[\frac{1 + i \times \left(n - m\right)}{n - m}\right] \times \left(n - \alpha\right)\right\} \\ + \left\{S_0 \times \left(\frac{n - \alpha}{n}\right) \times \left[\frac{\left(n - m\right) - \alpha}{\left(n - m\right)}\right] \times \left[\frac{1 + i \times \left(n - 2 \times m\right)}{n - 2 \times m}\right]\right\} \\ + \ldots + S_0 \times \left\{\frac{i \times \left[n - \left(\ell - 2\right) \times m\right] + 1}{\left[n - \left(\ell - 2\right) \times m\right]}\right\} \times \left\{\prod_{j=1}^{\ell-2} \frac{n - \left(j - 1\right)m - \alpha}{n - \left(j - 1\right)m}\right\} \end{array}\right\}$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\ell-1} P_j = S_0 \times \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\left(1 + n \times i\right)}{n}\right] + \left\{\left[\frac{1 + i \times \left(n - m\right)}{n - m}\right] \times \frac{\left(n - \alpha\right)}{n}\right\} \\ + \left\{\left[\frac{1 + i \times \left(n - 2 \times m\right)}{n - 2 \times m}\right] \times \left(\frac{n - \alpha}{n}\right) \times \left[\frac{n - m - \alpha}{\left(n - m\right)}\right]\right\} \\ + \ldots + S_0 \times \left\{\frac{i \times \left[n - \left(\ell - 2\right) \times m\right] + 1}{\left[n - \left(\ell - 2\right) \times m\right]}\right\} \times \left\{\prod_{j=1}^{\ell-2} \frac{n - \left(j - 1\right)m - \alpha}{n - \left(j - 1\right)m}\right\} \end{array}\right\}$$

Ou seja, a parte da soma das prestações referente aos **ℓ-1** primeiros subperíodos é dada por:

$$m \times \left(\sum_{k=1}^{\ell-1} P_j\right) = m \times S_0 \times \left\{\left(\frac{1 + n \times i}{n}\right) + \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{1 + i\left[n - \left(k - 1\right)m\right]}{n - \left(k - 1\right)m} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n - \left(j - 1\right)m - \alpha}{n - \left(j - 1\right)m}\right\}$$

Quanto aos m últimos períodos, a soma das prestações é interpretada como igual à relativa a um financiamento de valor $S_{(\ell-1)m}$, com prazo de m períodos, que deve ser amortizado pelo SAC à taxa i. Ou seja:

$$\sum_{j=(\ell-1)\times m+1}^{n} p_j = \frac{S_{(\ell-1)m}}{2} \times \left[2 + \left(m + 1\right) \times i\right]$$

Finalmente, somando as duas parcelas, tem-se:

$$S^{SACRE*} = m \times S_0 \times \left\{\left(\frac{1 + n \times i}{n}\right) + \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{1 + i\left[n - \left(k - 1\right)m\right]}{n - \left(k - 1\right)m} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n - \left(j - 1\right)m - \alpha}{n - \left(j - 1\right)m}\right\} + \frac{S_{(\ell-1)m}}{2}\left\{2 + i \times \left(m + 1\right)\right\} \quad \text{c.q.d.}$$